PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio IIIII

Palchetto C

Num.° d' ordine 20182

N. 12

1944 -

NAZIONALE
B. Prov.
VITT. EM. III
2053
NAPOLI

Digitized by Google

R. Rios
I
2053

Digitized by Google

Digitized by Google

C0825h

DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS, OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

Par feu Monsieur DE LA LOUBERE, *de l'Academie Françoise, & des Inscriptions & Belles Lettres.*

A PARIS,

Chez G. F. QUILLAU, Imprimeur Juré-Libraire de l'Université, rue Galande, près la Place Maubert, à l'Annonciation.

M. DCC. XXXII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

CET Ouvrage n'eſt gros, que par la multiplicité des Exemples; le ſujet d'ailleurs en eſt très-ſimple. Lorſque j'imaginai la définition de la Raiſon Géometrique, qui en eſt le fondement, j'employai à l'expliquer le mot de *Degré*, & j'avois toûjours eſperé, que je ne tomberois dans aucune équivoque, avec l'uſage, que les Analyſtes font de ce mot, dans la diſtinction des Equations ; mais enfin, j'ai crû qu'il valoit mieux le laiſſer aux Analyſtes, & je l'ai corrigé par le mot de *Grade*, en pluſieurs endroits de cet Ouvrage. Peut-être aurai-je omis quelquefois par mégarde cette

Digitized by Google

correction, mais cela ne fera aucun embarras; car on verra aiſément, ſi je parle de Raiſon Géometrique, auquel cas il faudra mettre *Grade*, ou ſi je parle d'Equation, auquel cas il faut laiſſer *Degré*. Je confeſſe auſſi que je n'ai pas ſans doute pris garde à toutes les fautes, que le Copiſte a pû faire dans les calculs, & même dans le diſcours; mais je ſuis perſuadé, que ces fautes ne ſçauroient arrêter qui que ce ſoit dans un Ouvrage auſſi aiſé à entendre que celui-ci.

Digitized by Google

TABLE

De ce qui eſt contenu dans cet Ouvrage.

DE l'eſſence de la raiſon, ou du rapport des grandeurs entre elles. Où je fais voir que l'eſſence de la raiſon géométrique conſiſte dans une ſerie ou ſuite de ſouſtractions, que j'appelle le détail de la raiſon. Page 1

De la proportion qui n'eſt que la conformité des deux raiſons dans leur détail. 27

Lemme pour le Problème de la Réſolution des Equations, où je donne la méthode de trouver le détail de la raiſon des racines des puiſſances de toute équation donnée. 29

De la Réſolution des Equations. Problème unique. 33

Article prémier contenant les Exemples des Equations homogènes, dont les hautes puiſſances ſont, l'une dans un membre de l'équation. & l'autre dans l'autre; où je fais voir comment on peut dans ma Méthode opérer par nombres & par lettres. ibid.

Article deuxième contenant les Equations homogénes, où les hautes puiſſances ſont dans un même membre de l'équation. 39

Article troiſième contenant les Exemples des Equations hétérogènes. 50

Article quatrième, Section prémière, quand l'une des hautes puiſſances eſt accompagnée d'un abſolu. 56

Article quatrième, Section deuxième, où les hautes puiſſances ſont hétérogènes, & dont l'une eſt accompagnée d'un abſolu. 71

Article quatrième, Section troiſième, des Fractions dans les Equations. 82

Article quatrième, Section quatrième, des doubles, triples, & multiples Equations de tous les degrés. 86

Article quatrième, Section cinquième, lorſque dans l'Equation il n'y a qu'une lettre, qui marque une quantité in-

Digitized by Google

connuë ; où je donne l'extraction des racines des puiſſances numériques, & des puiſſances littérales, la réſolution du cas irréductible, & celle de ces équations $x^3 = ax + b$, & $x^3 = ax - b$ 104

Art. 4. Sect. 6. de la réſolution des Equations entre grandeurs incommenſurables, après quoi je fais voir que les grandeurs qu'on appelle imaginaires, ne ſont point imaginaires, & que —4 par exemple a les mêmes racines que +4. 118

Art. 4. Sect. 7. des Equations qui ont autant de racines que de dimenſions. 126

Art. 4. Sect. 8. des racines incommenſurables. 134

Art. 4. Sect. 9. contenant divers Problèmes, dont quelques-uns ſont de nombres ſourds. 140

Art. 5. Des ſuites ou ſéries, ou approximations. 160

Ce qui ſuit regarde principalement la réduction des Equations. ibid.

Art. 6. Sect. 1. Examen de la Table générale des Grades des Racines Géométriques, qui ſert de Lemmes. 163

Art. 6. Sect. 2. Des Equations ſourdes du deuxième degré, où je donne leur propriété caractériſtique, qui eſt que la raiſon de leurs racines eſt toûjours périodique. 165

Article ſixième, Section troiſième. Où je donne la méthode de réduire au deuxième degré toutes les Equations qui y peuvent être réduites de quelque degré qu'elles ſoient. 193

Extraits de quelques Lettres de M. Leibnits. 201

Je cite quelquefois les Analyſtes dans cet Ouvrage. Je les ai parcourus, non pour les étudier à fond, mais pour y chèrcher des Equations, & les réſoudre par ma Méthode. Je ne ſçais de l'Analyſe que ce qu'il y a de plus commun dans la Logiſtique. Je commençai cette étude dans ma jeuneſſe, & même celle des Sections coniques. Je fis des Eléments à ma manière : mais enſuite ayant abandonné les Mathématiques pendant plus de trente-cinq ans, j'y ſuis revenu trop tard pour y faire tous les progrès que je m'étois promis, & dont je réſervai l'étude pour l'amuſement de ma vieilleſſe, ne ſçachant pas que dans la vieilleſſe cet amuſement devient un travail fort ſérieux.

DE LA

Digitized by Google

Digitized by Google

TABL

DES GRADES

$$+eqtfa+cqa$$

$$-zcqtfa-zcqa-ztfa-zta-qtfa-qa$$

POLI

DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS, *ou* DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

AVANT QUE D'ENTRER EN MATIERE, je suis obligé de transcrire ici une partie de ce que j'ai pensé sur l'Essence du rapport, ou de la raison des grandeurs entre elles, à la tête de mon Traité des proportions.

DE L'ESSENCE, DE LA RAISON, ou du rapport des grandeurs entre elles.

I. QUAND je considere le rapport, ou la raison qui est entre deux grandeurs de même espece, & terminées, ce que j'y cherche est l'égalité *, & si je les trouve égales, je connois parfaitement l'une par l'autre, & n'ai plus rien à y considerer, mais si je les trouve inégales, j'y découvre leur différence, & cette différence devient

* *Les afferiques sans aucune citation à la marge, se rapportent à mes élémens.*

Digitized by Google

l'objet d'une nouvelle comparaiſon. Car je puis comparer cette différence avec chacune des deux grandeurs premierement priſes : mais en comparant cette difference avec la plus grande grandeur, je trouve que l'excès de la plus grande grandeur ſur cette différence, eſt la moindre des deux premieres grandeurs que je connois déja, & cette comparaiſon m'eſt inutile ; puiſqu'elle ne peut offrir à mon eſprit rien de nouveau. Au contraire, ſi je compare cette différence avec la moindre des deux premieres grandeurs, je dois les trouver égales ou inégales. Si je les trouve égales, mon eſprit ſe repoſe : mais ſi elles ſont inégales, leur différence eſt l'objet d'une troiſiéme comparaiſon : & ainſi de ſuite.

Ces comparaiſons, comme on voit, ſont de véritables ſouſtractions, dont ces differences ſont les *reſtes*.

2. Et l'on voit auſſi, qu'après chaque ſouſtraction, c'eſt le *retranché* & le *reſte* de cette ſouſtraction, que l'on doit comparer enſemble dans la ſuivante, c'eſt-à-dire, que le *retranché* & le *reſte* de chaque ſouſtraction, deviennent, l'un le *tout*, & l'autre le *retranché* de la ſouſtraction d'après.

3. On voit encore qu'on ſouſtrait toujours une moindre grandeur, d'une plus grande, quand elles ſont inégales.

4. Et que quand elles ſont égales le détail de la raiſon finit.

DE'FINITIONS.

5. 1. LA raiſon que les Géométres appellent *raiſon arithmétique*, eſt la difference qui eſt entre deux grandeurs.

6. 2. Et la raiſon, qu'ils appellent *raiſon géométrique*, ou ſimplement *raiſon*, conſiſte dans le détail, ou dans la ſuite des ſouſtractions que je viens de marquer qu'on peut faire entre elles.

Puis donc que ſouſtraire une grandeur d'une autre, qui ſoit de même nature, nous eſt une choſe très-diſtinctement connuë, il s'enſuit que la raiſon géométrique, qui ne conſiſte que dans un détail ou ſuite de ſouſtractions, nous eſt très-diſtinctement connuë.

Digitized by Google

Exemple d'une raiſon en nombres.

7. Par exmple la raiſon géométrique, ou ſimplement la raiſon de ces deux nombres, 9 & 7, conſiſte en ce qu'ôtant 7 de 9, il reſte 2, & qu'ôtant 2 de 7, il reſte 5, & qu'ôtant encore 2 de 5, il reſte 3, & qu'ôtant encore 2 de 3 (car il *3. faut toujours ôter * le moindre du plus grand) il reſte 1, & qu'ôtant 1 de 2, il reſte encore 1 : & enfin que de 1 ôtant 1, le reſte eſt zero, qui ne fournit pas de nouvelle ſouſtraction à faire.

Raiſon de 9 à 7

9	Premiere Souſtraction.
7	
2	
7	2e. Souſtraction.
2	
5	
5	3e. Souſtraction.
2	
3	
3	4e. Souſtraction.
2	
1	
2	5e. Souſtraction.
1	
1	
1	Derniere Souſtraction.
1	
0	

Les citations à la marge ſe rapportent à cet ouvrage.

On peut de même comparer enſemble deux grandeurs quelconques de même eſpéce, & qui par conſéquent puiſſent être ſouſtraites l'une de l'autre, comme par exemple deux lignes.

AVERTISSEMENT.

8. PUISQU'ON peut faire par lettres toutes les Souſtractions, on peut faire auſſi par lettres le détail de toutes raiſons géométriques, comme par exemple le détail de la raiſon de 9 à 7.

Digitized by Google

Ainſi en mettant a pour 9, & b pour 7, & ſouſtrayant b d'a, le reſte ſera a — b. Et de b ſouſtrayant a — b, le reſte ſera — a + 2 b, & de — a + 2 b ſouſtrayant encore a — b, le reſte ſera — 2 a + 3 b, & ſouſtrayant encore a — b, le reſte ſera — 3 a + 4 b. Et ainſi de ſuite comme il eſt marqué ci à côté.

a	9
b	7
a — b	2
b	7
a — b	2
— a + 2 b	5
— a + 2 b	5
a — b	2
— 2 a + 3 b	3
— 2 a + 3 b	3
a — b	2
— 3 a + 4 b	1
a — b	2
— 3 a + 4 b	1
+ 4 a — 5 b	1
+ 4 a — 5 b	1
— 3 a + 4 b	1
+ 7 a — 9 b	0

AXIOME.

9. DE la définition de la raiſon il s'enſuit, que la raiſon entre deux grandeurs ne peut aller de deux manieres différentes.

Car puiſque le détail de cette raiſon eſt une ſuite de ſouſtractions, il ne peut recevoir des différences, que quelqu'une de ſes ſouſtractions ne ſe faſſe de deux manieres différentes, ce qui eſt * impoſſible.

AVERTISSEMENT.

POUR marquer une raiſon je mettrai deux points entre ſes termes : ainſi 9 : 7 voudra dire la raiſon de 9 à 7. Et par lettres a : b, par exemple, voudra dire la raiſon d'a à b.

Digitized by Google

AXIOME.

10. PUISQUE, tant que le détail d'une raiſon dure, on ſouſtrait toujours une moindre quantité d'une plus grande * les reſtes dans toutes ces ſouſtractions, ſont des grandeurs poſitives. *3.

Seulement dans la derniere ſouſtraction d'une raiſon, puiſqu'on ſouſtrait une grandeur égale d'une égale * le reſte eſt zero. *

AXIOME.

11. LE moindre terme d'une raiſon ne peut continuellement être ſouſtrait du plus grand. Il faut au contraire qu'en étant ſouſtrait une ou pluſieurs fois, il l'épuiſe enfin : car une grandeur poſitive ne peut toujours * être ſouſtraite d'une grandeur poſitive & terminée, ſans l'épuiſer. *

DEFINITION.

12. SI dans le détail d'une raiſon, le moindre terme eſt retranché dans toutes les ſouſtractions, (leſquelles en ce cas-là * ſeront en nombre limité) il eſt viſible que le plus grand terme eſt multiple du moindre * *11.

DEFINITION.

13. SI le moindre terme, après une ou pluſieurs ſouſtractions, ne laiſſe rien, ou qu'il laiſſe un reſte poſitif moindre que lui, j'appellerai *un grade* cette ſouſtraction, ou cette ſuite de ſouſtractions, dans leſquelles le moindre terme eſt toujours le *retranché*, & généralement dans le détail d'une raiſon j'appellerai un nouveau *grade*, quand ce ſera une nouvelle grandeur, qui ſera le *retranché*, ſoit qu'elle ne le ſoit qu'une fois, ou qu'elle le ſoit pluſieurs fois de ſuite.

Digitized by Google

Raiſon de 9 à 7

Ainſi dans la raiſon de 9 à 7, la premiere ſouſtraction fait un *grade*, parceque 7 n'eſt retranché que dans cette premiere ſouſtraction. La deuxiême, la troiſiême, & la quatriême ſouſtractions font un deuxiême *grade*; parceque le nombre 2 eſt retranché dans chacune de ces ſouſtractions. Enfin la cinquiême & la ſixiême ſouſtractions font un troiſiême *grade*; parceque l'unité eſt retranchée dans l'une & l'autre de ces ſouſtractions. Dans la raiſon de 9 à 7 le premier *grade* eſt donc d'une ſouſtraction, le deuxiême eſt de 3, & le troiſiême eſt de deux ſouſtractions.

1er. Grade.	9
	7
	2 / 7
	2 / 5
2e. Grade.	5 / 2
	2 / 3
	3
	2
	1
	2
	1
3e. Grade.	1 / 1
	1 / 1
	1 / 0

CONSE'QUENCE.

14. Les raiſons multiples n'ont donc qu'un grade, puiſque dans toutes les ſouſtractions d'une raiſon multiple, c'eſt toujours la grandeur ſous-multiple, ou le deuxiême
*12. terme de la raiſon * qui eſt le *retranché*.

AXIOME.

15. DANS une raiſon il ne peut y avoir aucun grade, dont les ſouſtractions ne finiſſent; puiſqu'une même grandeur eſt toujours le *retranché* dans un même
*13. grade * & qu'elle ne le peut toujours être ** ſans épuiſer
**11. la grandeur dont elle eſt ſouſtraite.

Digitized by Google

DEFINITION.

16. J'APPELLERAI *articles* dans le détail d'une raiſon, le *tout*, le *retranché*, & le *reſte* de chaque ſouſtraction: ſi bien que chaque ſouſtraction aura trois *articles*.

REMARQUE.

CHAQUE article du détail d'une raiſon par lettres, hormis les deux termes de la raiſon, quand ce ſont des grandeurs ſimples, comme a : b, chaque article, dis-je, étant une ſouſtraction, ou une différence, eſt un multiple du conſéquent retranché d'un multiple de l'antécédent, ou un multiple de l'antécédent retranché d'un multiple du conſéquent, ou la difference des deux multiples. Je prends le mot de multiple dans toute ſon étendue, c'eſt-à-dire, lors même qu'il n'eſt multiple que par l'unité

AVERTISSEMENT.

17. DANS le détail d'une raiſon, puiſque * c'eſt toujours le *retranché* & le *reſte* d'une ſouſtraction, qui deviennent le *tout* & le *retranché* de la ſouſtraction ſuivante, & puiſque * dans tout un même grade, le retranché eſt toujours le même; il s'enſuit que tant qu'un grade dure, c'eſt-à-dire tant que le même *retranché* ſe trouve moindre que le reſte, le *reſte* d'une ſouſtraction devient le *tout* de la ſouſtraction ſuivante. *2. *13.

Ainſi dans ces trois premieres ſouſtractions de la raiſon 11 : 3, ou de 11 à 3, toutes d'un même grade, puiſque le nombre 3 eſt le *retranché* en toutes, le *tout* de la deuxiéme ſouſtraction, qui eſt 8, eſt le *reſte* de la premiere, & 5, le tout de la troiſiéme, eſt le *reſte* de la ſeconde.

11
3
8
8
3
5
5
3
2

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

18. PUISQUE * le *retranché* de la derniere ſouſtraction d'un grade eſt plus grand que ſon reſte, & puiſque * l'un doit être ſouſtrait de l'autre dans la ſouſtraction ſuivante, qui eſt la premiere du grade ſuivant, il s'enſuit que quand il y a deux ſouſtractions immédiates, ou conſecutives, dont la premiere eſt la derniere d'un grade, & la deuxiême la premiere du grade ſuivant, alors le *retranché* de la premiere devient le *tout* de la deuxiême, & le *reſte* de la premiere devient le *retranché* de la deuxiême, * 15. * 13.

Ainſi dans la raiſon de 11 à 3, après la troiſiême & derniere ſouſtraction du premier grade, (qui eſt la derniere, parceque le *retranché* 3 s'y trouve plus grand que le *reſte* 2) le *tout* de la quatriême ſouſtraction, qui eſt la premiere du deuxiême grade, eſt le nombre 3, qui a été le *retranché* dans tout le premier grade, & le *retranché* eſt le nombre 2, qui a été le *reſte* de la ſouſtraction précédente.

De même dans la cinquiême ſouſtraction, qui eſt la premiere du troiſiême grade, le nombre 2 eſt le *tout*, parcequ'il a été le *retranché* dans la ſouſtraction précédente, qui toute ſeule fait le deuxiême, & le *retranché* eſt l'unité; parcequ'elle a été le *reſte* de la ſouſtraction précédente.

1er. Grade.	11	
	3	
	8	
	8	
	3	
	5	
	5	
	3	
	2	
2e. Grade.	3	
	2	
	1	
	2	
3e. Grade.	1	
	1	
	1	
	1	
	0	

COROLLAIRE.

Digitized by Google

COROLLAIRE.

19. IL s'enſuit de ces deux avertiſſemens, que dans le détail de toute raiſon, un tout de quelque ſouſtraction que ce ſoit, eſt plus grand, ou vaut mieux, qu'aucun des articles qui le ſuivent, & qu'ainſi le premier terme d'une raiſon vaut mieux que tout autre article de cette raiſon, & que le deuxiême terme d'une raiſon devenant le premier tout du deuxiême grade, eſt plus grand que tout article ſuivant.

AVERTISSEMENT.

20. PUISQUE dans un grade autre que le premier, le premier tout eſt le retranché du
17. grade précédent, & puiſque le retranché d'un grade, autre que le premier grade, eſt le dernier reſte du grade précédent, il s'enſuit que le premier tout d'un grade, autre que le premier & le ſecond grades, eſt le dernier reſte du grade antéprécédent, ou qui précéde le précédent, & qu'autant qu'il y a de ſouſtractions dans un grade, autre que le premier & le ſecond grades, autant de fois on ſouſtrait le dernier reſte du grade précédent, du dernier reſte de l'antéprécédent.

Ainſi dans la raiſon 30 : 13, ou de 30 à 13, le premier tout du troiſiême grade eſt le nombre 4, dernier reſte du grade antéprécédent, c'eſt-à-dire du premier grade : & l'unité, qui eſt

1er. Grade.	2e. Grade.	3e. Grade.
30		
13		
17		
17		
13		
4		
13		
4		
9		
9		
4		
5		
5		
4		
1		
4		
1		
3		
3		
1		
2		
2		
1		
1		
1		
1		
0		

Digitized by Google

le dernier reſte du grade précédent, c'eſt-à-dire du deuxiême grade, eſt ſouſtraite du nombre 4, dans les 4 ſouſtractions du troiſiême grade.

COROLLAIRE.

21. LE dernier reſte d'un grade devenant * le retranché du grade ſuivant, eſt plus grand que le dernier reſte du grade ſuivant, puiſque le dernier reſte d'un grade eſt moindre que le retranché de ce grade. *17

CONSE'QUENCE.

22. DE-là s'enſuit que les derniers reſtes des grades d'une raiſon, vont toujours décroiſſant tant que le détail de cette raiſon dure.

AXIOME.

23. DANS les raiſons de nombre à nombre, les derniers reſtes des grades ne pouvant décroître au deſſous de l'unité, c'eſt une conſéquence néceſſaire, que les grades & les ſouſtractions ceſſent dans toute raiſon de nombre à nombre.

AXIOME.

24. DANS une raiſon a : b, dont le détail finiſſe, les multiples de ſes termes a, & b, qui ſeront ſouſtraits l'un de l'autre dans ſon dernier reſte, ſeront égaux entre eux.

Car ſoit ſon dernier reſte $xa - yb$, où x, & y ſont les nombres multiplicateurs d'a, & de b. Puiſque $xa - yb$ eſt le dernier reſte de la raiſon a : b ; donc $xa - yb = o$; donc en tranſpoſant y b ſous ſigne contraire $xa = o + yb$, donc $xa = yb$.

Digitized by Google

Formation des grades d'une raiſon par lettres.

25. DANS le premier grade d'une raiſon quelconque a : b, le premier reſte eſt a — b, le deuxiême eſt a — 2 b, le troiſiême a — 3 b, & ainſi de ſuite, où le plus grand terme a, garde toujours ſon ſigne, qui eſt le ſigne +, & ſon préfix qui eſt l'unité. Et le moindre terme b y eſt toujours affecté du ſigne —, & a pour préfix tous les nombres de ſuite à commencer par l'unité, & à la concurrence du nombre des ſouſtractions de ce grade, le rang deſquelles eſt toujours marqué par le préfix du moindre terme b.

26. Tous les préfix de b peuvent être marquez en général par la lettre p, & ainſi tous les reſtes du premier grade ſeront chacun a — p b, ou ſelon ſes différentes valeurs, la lettre p marquera le rang de chaque ſouſtraction, & dans le dernier reſte elle marquera la derniere ſouſtraction de ce grade. Et ce premier reſte + a — p b ſuivant la regle de la ſouſtraction par lettres eſt formé par le retranché b, lequel après avoir été multiplié par p, & avoir pris un ſigne contraire, a été joint au tout a. Et cette premiere ſouſtraction eſt le commencement de la table générale des grades des raiſons géométriques, & a — p b eſt l'expreſſion générale des reſtes de ce premier grade.

27. Dans le deuxiême grade * le retranché b du grade précédent doit être le tout, & + a — p b, dernier reſte du grade précédent, doit être le retranché, leſquels ſont déja dans la table. Et pour retrancher a — p b de b, d'autant que dans chaque grade, le retranché peut l'être une ou pluſieurs fois, il faut multiplier le retranché + a — p b par f, qui marquera le multiplicateur du ſecond grade, & après en avoir changé les ſignes, il faut l'ajouter au tout b, ce qui fait — f a + f p b + b, qu'il faut mettre dans la table pour l'expreſſion générale des reſtes du deuxiême grade des raiſons géométriques. * 2.

28. Dans le troiſiême grade, le retranché du deuxiême doit être le tout, & le dernier reſte du deuxiême doit

être le retranché, c'eſt-à-dire que les deux dernieres quantitez, miſes déja dans la table, doivent être, l'une le tout, & l'autre le retranché du premier reſte du troiſiême grade, & pour retrancher —ſa+ſpb+b, de a—pb, il faut multiplier par la lettre t, qui ſera le multiplicateur du troiſiême grade, le dernier reſte —ſa+ſpb+b, & après en avoir changé les ſignes, l'ajouter à a — pb, ce qui fait +tſa—tſpb—tb+a—pb, & pour plus de netteté rangeant les multiples d'a de ſuite, & les multiples de b de ſuite, on mettra dans la table +tſa+a —tſpb—tb—pb, ce qui ſera l'expreſſion générale des reſtes du troiſiême grade des raiſons géométriques.

29. Ainſi pour avoir le premier reſte du quatriême grade, on multipliera le dernier reſte de la table, qui eſt +tſa +a—tſpb—tb—b par une nouvelle lettre q, pour marquer que c'eſt le multiplicateur du quatriême grade, & après en avoir changé les ſignes, on l'ajoutera au pénultiême reſte de la table, qui eſt celui du ſecond grade, ſçavoir —ſa+ſpb+b, & ſéparant comme deſſus les multiples d'a, de ceux de b, ce ſera —qtſa—qa—ſa +qtſpb+qtb+pb+ſpb+b, que l'on ajoutera à la table pour l'expreſſion générale des reſtes du quatriême grade.

30. Ainſi on multipliera l'expreſſion générale des reſtes du quatriême grade par c, qui ſera le multiplicateur du cinquiême, & après en avoir changé les ſignes, on l'ajoutera au reſte du troiſiême grade, & il en reviendra l'expreſſion générale des reſtes du cinquiême grade, que l'on ajoutera à la table.

31. Et l'on aura ainſi de ſuite les reſtes de tous les grades, ou leurs expreſſions générales, obſervant de mettre toujours une nouvelle lettre pour multiplicateur.

AVERTISSEMENT.

32. DANS cette table les lettres a & b, qui marquent les termes de toute raiſon géométrique en général, changeant de ſigne à chaque grade, & conſervant toujours un même ſigne dans tous les reſtes d'un même grade,

Digitized by Google

le terme a ſera affecté du ſigne + dans tous les reſtes des grades en rang impair, premier, troiſiême, cinquiême, &c. & il ſera affecté du ſigne — dans tous les reſtes des grades en rang pair, deuxiême, quatriême, ſixiême, &c.

Et au contraire le terme b ſera affecté du ſigne — dans tous les reſtes des grades en rang impair, & du ſigne + dans tous les reſtes des grades en rang pair.

Et ainſi le même terme n'eſt jamais affecté de même ſigne dans deux grades conſécutifs.

AVERTISSEMENT.

33. COMME la diviſion * vaut une, ou pluſieurs ſouſtractions d'une même grandeur, dont la multitude eſt marquée par le quotient, ſi bien que ſi la diviſion n'eſt qu'une ſouſtraction le quotient en eſt l'unité, ſi la diviſion vaut deux ſouſtractions, le quotient en eſt deux, ſi elle vaut trois ſouſtractions, le quotient en eſt trois, & ainſi de ſuite; delà s'enſuit qu'on peut faire le détail d'une raiſon par la diviſion comme par la ſouſtraction, ainſi au premier grade on peut diviſer le premier terme de la raiſon par le ſecond, & le quotient de la diviſion marquera la multitude des ſouſtractions de ce grade, & ſi la diviſion de ce premier grade eſt imparfaite, & qu'elle laiſſe un reſte moindre que le diviſeur, qui eſt le retranché de ce grade, il y aura un deuxiême grade, où le deuxiême terme ſera le tout d'une nouvelle diviſion, le reſte du premier grade en ſera le diviſeur, & le quotient marquera la multitude des ſouſtractions de ce ſecond grade.

Et ſi la diviſion de ce deuxiême grade eſt encore imparfaite, & qu'elle laiſſe un reſte moindre que le diviſeur, qui eſt le retranché de ce deuxiême grade, il y aura un troiſiême grade, qui ſe formera par une troiſiême diviſion, dont le *tout* ſera le *retranché*, ou le diviſeur du grade précédent, & le reſte du grade précédent en ſera le diviſeur, & le quotient marquera la multitude des ſouſtractions de ce troiſiême grade, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on vienne à un grade dans lequel la diviſion ſoit exacte & ne laiſſe rien de reſte.

Ainſi dans la raiſon de 9 à 7, la diviſion du premier grade a l'unité pour quotient; parceque diviſant 9 par 7, 7 n'eſt qu'une fois en 9, & il reſte 2.

1er. Grade.

9	9 (1. & il reſte 2
7	7
2	

Dans le deuxiéme grade, le nombre 2, qui eſt le reſte du grade précédent, diviſant 7, qui eſt le diviſeur du même grade précédent, le quotient de la diviſion de ce deuxiême grade eſt 3, qui marque que ce grade eſt de trois ſouſtractions, ou que 2 peut être ſouſtrait trois fois de 7, & il reſte 1.

2e. Grade.

7	7 (3. & il reſte 1
2	2
5	
5	
2	
3	
2	
1	

Dans le troiſiême grade, l'unité, qui eſt le reſte du grade précédent, devant être ſouſtraite de 2, qui eſt le retranché, ou le diviſeur du grade précédent, on peut diviſer 2 par 1, & le quotient ſera 2, qui marquera que ce troiſiême grade eſt de deux ſouſtractions, ou que 1 pouvoit être ſouſtrait deux fois de 2, & parceque cette derniere diviſion ſe trouve exacte, & ne laiſſe rien, la raiſon ceſſe, & les quotients de ſes trois grades ſont 1 3 2, qui font voir nettement l'eſſence de cette raiſon. Que ſi l'on ſuppoſoit que la raiſon ne finît pas, il s'enſuivroit qu'elle auroit un nombre infini de grades, & par conſéquent un nombre infini de quotients. Les Analyſtes les ont nommez tous enſemble par une ſeule lettre ſans les connoître.

3e. Grade.

2	2 (2. & il ne reſte
1	rien.
1	
1	
1	
0	

AVERTISSEMENT.

* J'Ai déja dit * qu'on a nommé la raiſon multiple ou d'un grade, par ſon quotient: ainſi la raiſon double eſt la raiſon multiple, dont 2 eſt le quotient, la triple eſt celle, dont 3 eſt le quotient, & ainſi de ſuite. L'on

Digitized by Google

a auſſi donné des noms aux raiſons de deux grades, on les trouve dans les commentaires de Clavius ſur le cinquiême livre des Elémens d'Euclide, & en d'autres Auteurs, & ces noms ſont pris des quotients des deux grades de ces raiſons, on pourroit de même nommer toutes les raiſons qui finiſſent par les quotients de tous leurs grades, comme la raiſon de 9 à 7 par ſes trois quotients 1 3 2.

PROPOSITION.

THEOREME.

34. DANS chaque reſte du détail d'une raiſon par lettres, le préfix du ſecond terme de la raiſon comparé au préfix du premier terme, eſt capable des ſouſtractions, qui ont été faites dans le détail de cette raiſon, juſqu'à la ſouſtraction, dont eſt ce reſte.

Dans le premier grade chaque reſte eſt $a - pb$ où p * multiplicateur du premier grade, marque, ſelon ce qu'il a d'unitez, le nombre des ſouſtractions qui ont été faites dans ce premier grade juſqu'à chaque reſte. Et ainſi dans chaque reſte en comparant le préfix de b au préfix d'a, à meſure qu'on compare a à b, l'unité, qui eſt le préfix d'a, pourra être ſouſtraite autant de fois de p, préfix de b, que b aura été ſouſtrait d'a. *24.

Dans le deuxiême grade, dont les reſtes ſont marquez $- fa + fpb + b$, le nombre f multiplicateur de ce deuxiême grade * marque de même, ſelon ce qu'il a d'unitez, combien il a été fait de ſouſtractions pour parvenir à chaque reſte de ce deuxiême grade. Que ſi vous diviſez le préfix $fp + 1$ du deuxiême terme b, par f préfix du premier terme a, le quotient ſera p, & il reſtera 1, c'eſt-à-dire que f pourra être ſouſtrait de $fp + 1$ autant de fois que p a d'unitez, & par conſéquent autant de fois qu'il y a eu des ſouſtractions dans le premier grade de cette raiſon, & enfin diviſant f, premier préfix par l'unité, qui reſte du ſecond préfix, le quotient ſera f qui marquera que l'unité aura été ſouſtraite d'f autant de fois qu'il aura été fait des ſouſtractions dans ce deu- *29.

xiême grade. Donc les préfix de ce deuxiême grade ſ, & ſp + 1 ſont capables premierement des ſouſtractions p, & puis des ſouſtractions ſ, c'eſt à dire d'autant de ſouſtractions qu'il y en a eu au premier & au deuxiême grades juſqu'à la ſouſtraction, dont le nombre ſ aura marqué le rang par ſes unitez.

Dans le troiſiême grade, dont les reſtes ſont marquez + t ſa + 1 a — t ſp b — t b — p b. Le nombre t multiplicateur du troiſiême grade marque de même, * ſelon ce qu'il a d'unitez, combien il a été fait de ſouſtractions pour parvenir à chaque reſte de ce troiſiême grade. Que ſi vous diviſez le préfix t ſp + t + p du deuxiême terme b, par le préfix + t ſ + 1 du premier terme a, le quotient ſera p, & il reſtera t, & diviſant le premier préfix t ſ + 1 par t, le quotient ſera ſ, & il reſtera 1, & diviſant t par 1, le quotient ſera t, & ainſi les trois quotients ſeront p. ſ. t. Donc dans ce troiſiême grade, les préfix + t ſ + 1, & + t ſp + t + p ſont capables, 1°. des ſouſtractions p, 2°. des ſouſtractions ſ, & enfin des ſouſtractions t, c'eſt-à-dire d'autant de ſouſtractions qu'il y en a eu au premier, au deuxiême, & au troiſiême grades, juſqu'à la ſouſtraction, dont le nombre t aura par ſes unitez, marqué le rang dans le troiſiême grade.

*27.

Dans le quatriême grade, dont les reſtes ſont marquez — q t ſa — q a — ſa + q t ſp b + q t b + q p b + ſp b + b, le nombre q marque de même, * ſelon ce qu'il a d'unitez, combien il a été fait de ſouſtractions pour parvenir à chaque reſte de ce quatriême grade. Que ſi vous diviſez le préfix du deuxiême terme b, qui eſt + q t ſp + q t + q p + ſp + 1, par le préfix du premier terme a, qui eſt + q t ſ + q + ſ, le quotient ſera p, & il reſtera q t + 1; & diviſant le premier préfix + q t ſ + q + ſ par + q t + 1, le quotient ſera ſ, & il reſtera + q; & diviſant q t + 1 par q, le quotient ſera t, & il reſtera 1; & enfin diviſant q par 1, le quotient ſera q. Donc les quotients ſeront p. ſ. t. q. Donc dans ce quatriême grade, les préfix q t ſ + q + ſ, & q t ſp + q t + q p + ſp + 1, ſont capables 1°. des ſouſtractions p. 2°. des ſouſtractions ſ, 3°. des ſouſtractions t, & enfin des ſouſtractions q, c'eſt-à-dire d'autant de ſouſtractions

*28.

Digitized by Google

étions qu'il y en a eu aux premier, deuxiême, troiſiême, & quatriême grades juſqu'à la ſouſtraction, dont le nombre q aura marqué le rang dans le quatriême grade par ſes unitez. Et ainſi de ſuite chaque grade étant formé par un nouveau multiplicateur, chaque multiplicateur reviendra en ſon rang pour quotient dans les diviſions, dont les préfix ſeront capables.

c. q. f. d.

COROLLAIRES.

35. DE cette propoſition il s'enſuit qu'à meſure que le détail d'une raiſon entre deux grandeurs, ſe forme par la ſouſtraction, le même détail ſe forme par l'addition entre leurs préfix.

Il s'enſuit auſſi que les préfix du dernier reſte d'une raiſon ſont capables des ſouſtractions de cette raiſon.

PROPOSITION.

PROBLEME.

36. LE nombre des grades d'une raiſon, dont le détail finiſſe, étant preſcrit avec le nombre des ſouſtractions de chacun de ſes grades, il faut trouver deux nombres, qui ſoient entre eux en cette raiſon.

Que la raiſon propoſée ait, par exemple, trois grades, & trois ſouſtractions au prémier grade, 2 au deuxiême, & 4 au troiſiême. Pour trouver deux nombres, qui ſoient en cette raiſon, je prends a, & b, que

1er. Grade.	31	a	
	9	b	
	22	a — b	
	22	a — b	
	9	b	
	13	a — 2b	
	13	a — 2b	
	9	b	
	4	a — 3b	
2e. Grade.	9	b	
	4	a — 3b	
	5	— a + 4b	
	5	— a + 4b	
	4	a — 3b	
	1	— 2a + 7b	
3e. Grade.	4	a — 3b	
	1	— 2a + 7b	
	3	+ 3a — 10b	
	3	3a — 10b	
	1	— 2a + 7b	
	2	5a — 17b	
	1	— 2a + 7b	
	1	7a — 24b	
	1	+ 7a — 24b	
	1	— 2a + 7b	
	0	+ 9a — 31b	

Digitized by Google

je ſuppoſe en être les termes, & je fais le détail de leur raiſon en ſouſtrayant b de a trois fois, ce qui fait le premier grade, dont le dernier reſte eſt a — 3 b ; puis de b je ſouſtrais deux fois a — 3 b, ce qui fait le deuxiême grade, dont le dernier reſte ſera — 2 a + 7 b. Et enfin de a — 3 b je ſouſtrais quatre fois — 2 a + 7 b, ce qui fait le troiſiême & dernier grade preſcrit, dont le dernier reſte eſt + 9 a — 31 b ; & il s'enſuit du corollaire précédent que les préfix 31, & 9 ſont en la raiſon preſcrite de trois grades, & de trois ſouſtractions au premier, de deux au deuxiême, & de quatre au troiſiême, comme il paroît dans le détail ci-devant, de la raiſon 31 : 9.

COROLLAIRE.

37. IL s'enſuit de cette propoſition, que dans le dernier reſte d'une raiſon quelconque a : b, qui finit, ſi a, & b ſont des nombres, le préfix de b comparé au préfix d'a exprimant la raiſon du nombre a au nombre b, il y a quatre nombres qui ſont deux fois la même raiſon, 1°. la raiſon a : b, 2°. la raiſon du préfix de b au préfix d'a, & le produit de l'antécédent de la premiere, & du conſéquent de la ſeconde eſt égal au produit du conſéquent de la premiere, & de l'antécédent de la ſeconde, comme ici 9 a = 31 b, puiſque dans le dernier reſte — 9 a + 31 b = 0.

CONSE'QUENCE.

38. PUISQUE la raiſon a : b eſt exprimée par la raiſon 31 : 9, a peut donc être 31, & alors b ſera 9, & 9 a ſera 31 multiplié par 9, & 31 b ſera 9 multiplié par 31, & l'un vaudra l'autre, c'eſt-à-dire que neuf fois 31 vaudront trente & une fois 9. Et il a été déja * démontré plus en général par la notion de la multiplication, qu'un premier nombre multiplié par un ſecond, donne le même produit que le ſecond multiplié par le premier.

AVERTISSEMENT.

39. J'Ai démontré ailleurs * que dans chaque reſte d'une raiſon les deux préfix ſont des nombres premiers entre eux.

AVERTISSEMENT.

40. J'Ai auſſi démontré ailleurs qu'il y a des continus en telles raïſons, que le détail n'en finit jamais.

DEFINITIONS.

41. TOUTE raiſon, dont le détail finit, eſt appellée *raiſon de nombre à nombre*; parcequ'elle * peut être exprimée par nombres. * 37.

42. Toute raiſon, dont le détail ne peut finir, ne peut être * exprimée par nombres, & elle eſt appellée *raiſon ſourde*. *

REMARQUE.

43. DANS les raiſons de nombre à nombre, on parvient à l'égalité; ou au zero dans un nombre fini de ſouſtractions. Dans les raiſons ſourdes, où les derniers reſtes des grades vont * toujours décroiſſant, on va chercher le zero ou l'égalité dans l'infini, ou dans un nombre infini de ſouſtractions. * 21.

PROPOSITION.

THEOREME.

44. PUISQUE l'on peut ſouſtraire une grandeur négative d'une négative * il y a raiſon de l'une à l'autre. En quoi il faut obſerver que comme dans la raiſon de deux grandeurs poſitives on retranche toujours une moindre grandeur poſitive d'une plus grande poſitive, auſſi dans la raiſon de deux grandeurs négatives on ſouſtrait toujours une moindre grandeur négative, ou, ſi l'on veut, une grandeur moins négative, d'une plus grande négative,

Digitized by Google

ou, si l'on veut encore, d'une grandeur plus négative: ainsi

— 2	— 9	+ 9	+ a
— b	— 7	+ 7	+ b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
— b	— 7	+ 7	+ b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
+ a — 2 b	— 5	+ 5	— 2 + 2 b
+ a — 2 b	— 5	+ 5	— a + 2 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
+ 2 a — 3 b	— 3	+ 3	— 2 a + 3 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
+ 3 a — 4 b	— 1	+ 1	— 3 a + 4 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
+ 3 a — 4 b	— 1	+ 1	— 3 a + 4 b
— 4 a + 5 b	— 1	+ 1	+ 4 a — 5 b
+ 3 a — 4 b	— 1	+ 1	— 3 a + 4 b
— 4 a + 5 b	— 1	+ 1	+ 4 a — 5 b
+ 7 a — 9 b	— 0	+ 0	— 7 a + 9 b

Démonstration. De — 9 ôtant — 7, il reste — 2 comme de + 9 ôtant + 7, il reste + 2. Puis de — 7 ôtant — 2, reste — 5, comme de + 7 ôtant + 2, reste + 5, & ainsi des soustractions suivantes, dans lesquelles on parvient au
*4 zero de part & d'autre en même temps, ce qui * est la fin des raisons. Or cela est aisé à entendre: car soustraire une raison négative d'une négative, c'est en un sens diminuer la négative, dont on soustrait, c'est la rendre négative, mais moins négative: mais en même temps c'est l'approcher d'autant du zero, c'est augmenter d'autant sa valeur. Et comme — 9, & — 7 sont autant au dessous du zero, que + 9, & + 7 sont au dessus, il est naturel que donnant à — 9, & à — 7 les mêmes accroissemens qu'on retranche de + 9, & de + 7, on arrive en même temps de part & d'autre au zero. Le détail de la raison de — 9 à — 7 est donc le même que celui de + 9 à + 7, mais le premier se forme par des soustractions négatives, qui sont des ac-

Digitized by Google

croiſſemens réels, ou de vraies additions, & le deuxiéme ſe forme par autant de décroiſſemens réels, ou de vraies ſouſtractions. *c. q. f. d.*

AVERTISSEMENT.

QUOIQUE j'aye fixé cet exemple aux nombres, en ſuppoſant a = 9, & b = 7, pour rendre cette démonſtration plus ſenſible, il eſt néanmoins évident que ſi a, & b ſignifient des lignes, ou d'autres continus en raiſon ſourde, le détail en pourra être continué infiniment de part & d'autre, ſans qu'il y ait aucune différence.

PROPOSITION.

THEOREME.

45. PUISQUE l'on peut ſouſtraire une grandeur poſitive d'une négative, & une négative d'une poſitive * il y a raiſon des unes aux autres, mais le détail s'en fait par des additions, & non par des ſouſtractions, en ajoutant dans chaque addition, les deux moindres nombres de l'addition précédente, ou les grandeurs qui ont les moindres préfix dans l'addition précédente. *

Démonſtration. Comme ajouter une grandeur négative à une poſitive, c'eſt retrancher autant * de la poſitive; * & comme ajouter une grandeur poſitive à une négative, c'eſt encore retrancher autant de la négative * on fera * entre les mêmes grandeurs affectées de ſignes contraires des ſouſtractions réciproques en les ajoutant enſemble.

— a	— 9	+ 9	+ a
+ b	+ 7	— 7	— b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
+ b	+ 7	— 7	— b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
— a + 2 b	+ 5	— 5	+ a — 2 b
— a + 2 b	+ 5	— 5	+ a — 2 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
— 2 a + 3 b	+ 3	— 3	+ 2 a — 3 b
— 2 a + 3 b	+ 3	— 3	+ 2 a — 3 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
— 3 a + 4 b	+ 1	— 1	+ 3 a — 4 b
— a + b	— 2	+ 2	+ a — b
— 3 a + 4 b	+ 1	— 1	+ 3 a — 4 b
— 4 a + 5 b	— 1	+ 1	+ 4 a — 5 b
— 4 a + 5 b	+ 1	+ 1	+ 4 a — 5 b
— 3 a + 4 b	— 1	— 1	+ 3 a — 4 b
— 7 a + 9 b	0	0	+ 7 a — 9 b

Ainſi à + 9 ajoutant — 7, la ſomme eſt + 2, & à — 9 ajoutant + 7, la ſomme eſt — 2. Puis à — 7 ajoutant + 2, la ſomme eſt — 5, & à + 7 ajoutant — 2, la ſomme eſt + 5. Et ainſi des autres additions, où l'on voit que les deux nombres 9 & 7, affectez de ſignes contraires, ſe détruiſent réciproquement l'un l'autre juſqu'au zero, avec cette différence qu'à l'égard des nombres poſitifs, ces additions ſont des décroiſſemens, & de véritables ſouſtractions, & qu'à l'égard des négatifs, ce ſont des accroiſſemens, ou de véritables additions. Donc, &c.

c. q. f. d.

AVERTISSEMENT.

CET exemple eſt encore ici appliqué aux nombres, pour en rendre la verité plus ſenſible, mais ſi l'on ſuppoſe encore ici qu'a & b ſoient des continus en raiſon ſourde, il eſt évident que le détail de leur raiſon de part & d'autre, pourra être toujours continué ſans aucune difference.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

LE détail ſe peut faire auſſi par la ſouſtraction,

— a	+ a
+ b	— b
— a — b	+ a + b
+ b	— b
— a	+ a + b
+ a — 2 b	— a — 2 b
&c.	&c.

PROPOSITION.

THEOREME.

46. DANS le détail par lettres d'une raiſon quelconque a : b, toute ſouſtraction, hormis la prémière, ſoit qu'elle ſoit de même grade que la ſouſtraction antérieure, ou qu'elle ſoit d'un grade différent, aura dans ſon *reſte* les mêmes ſommes, mais avec mêmes ſignes, ſi elle eſt de même grade, ou avec ſignes contraires, ſi elle eſt de grade différent.

Démonſtration. Dans toute ſouſtraction ſubſéquente à une autre, comme les ſouſtractions Y, & Z,

	b	
X	a — b	
	— a + 2 b	
	— a + 2 b	a — b
Y	a — b	— a + 2 b Z
	— 2 a + 3 b	2 a — 3 b

ſont ici ſubſéquentes à la ſouſtraction X ; on ſouſtrait ou le *retranché* de la précédente, du reſte de la précédente, comme dans la ſouſtraction Y, ou le *reſte* de la précédente, du *retranché* de la précédente, comme dans la ſouſtraction Z, ſi bien que ce ſont les mêmes articles ſouſtraits l'un de l'autre, le prémier du ſecond dans la

Digitized by Google

ſouſtraction Y, & le ſecond du prémier dans la ſouſtraction Z. Mais ſouſtraire ces articles l'un de l'autre, c'eſt ſouſtraire en même temps l'un de l'autre deux termes homonymes affectez de ſignes contraires, ſçavoir + a de — a & — b de + 2 b dans la ſouſtraction Y, & — a de + a, & + 2 b de — b dans la ſouſtraction Z. Donc dans l'une & l'autre ſouſtraction * les termes a & b doivent avoir pour préfix, la ſomme des préfix de — a, & de + a, c'eſt-à-dire 2, & la ſomme des préfix de — b, & de + 2 b, c'eſt-à-dire 3, mais avec des ſignes contraires pareils aux ſignes des *tous* de ces deux ſouſtractions, dans leſquels * le terme a & le terme b ſont ſous ſignes contraires. Car ces deux *tous* * ſont le *retranché* & le *reſte* de la ſouſtraction antérieure. Donc dans le détail d'une raiſon, &c. *c. q. f. d.*

COROLLAIRES

Du détail de la raiſon géométrique.

47. 1. HORMIS les termes d'une raiſon, il n'y a aucun article dans le détail de cette raiſon qui ne ſoit le reſte de quelqu'une de ſes ſouſtractions; car le premier *tout* d'un grade eſt le dernier reſte du grade antéprécédent, & dans un même grade chaque *tout*, hormis le premier de ce grade, eſt le reſte de la ſouſtraction précédente. Et quant au *retranché* d'un grade, il eſt le dernier *reſte* du grade précédent; ainſi il n'y a ni *tout*, ni *retranché* qui ne ſoit le *reſte* de quelque ſouſtraction, hormis les deux termes de la raiſon.

48. 2. Tout *reſte*, hormis le dernier du pénultiême, ou du dernier grade d'une raiſon, eſt le *tout* de quelque ſouſtraction poſtérieure à celle, dont il eſt le *reſte* : car s'il eſt le dernier reſte de ſon grade, il eſt le *retranché* du grade prémierement ſuivant, & par conſéquent le prémier *tout* du grade ſecondement ſuivant. S'il n'eſt pas le dernier *reſte* de ſon grade, il eſt le *tout* de la ſouſtraction, qui dans ce même grade ſuit celle, dont il eſt le *reſte*.

49. 3. Tout *reſte* n'eſt pas *retranché* dans quelque ſouſtraction. Il n'y a que le dernier reſte de chaque grade, qui devient le *retranché* dans toutes les ſouſtractions du grade ſuivant.

4. Tout

Digitized by Google

§ 50. 4. Tout *retranché*, hormis celui du dernier grade d'une raiſon, eſt un *tout*, car il l'eſt dans la premiere ſouſtraction du grade, qui ſuit celui, duquel il eſt le *retranché*.

§ 51. 5. Tout *tout* n'eſt pas un *retranché*. Il n'y a que le premier *tout* d'un grade qui le ſoit, ſçavoir dans le grade précédent.

Valeur des tous *dans le détail d'une raiſon.*

§ 52. CHAQUE *tout* d'un grade contient autant de fois le *retranché* de ſon grade, qu'il y a de ſouſtractions depuis, & y compriſe la ſouſtraction, dont eſt ce *tout* juſqu'à la derniere incluſivement, plus le dernier reſte de ſon grade.

Ainſi dans la raiſon 14 : 3, le nombre 14, qui eſt le premier *tout* du premier grade compoſé de quatre ſouſtractions, contient quatre fois le nombre 3; puiſque 3 étant le *retranché* dans toutes les ſouſtractions, il eſt retranché quatre fois de 14, & de plus 14 contient 2, qui eſt le dernier reſte de ce grade, c'eſt-à-dire, ce qui reſte de 14 après qu'on en a retranché quatre fois le nombre 3.

14	3
11	
11	
3	
8	
8	
3	
5	

De même le nombre 11, qui eſt le *tout* de la deuxiême ſouſtraction, contient trois fois le nombre 3; puiſque le nombre 3 en eſt ſouſtrait trois fois, c'eſt-à-dire autant de fois qu'il y a de ſouſtractions, depuis, & y compriſe cette ſeconde juſqu'à la derniere incluſivement, & de plus le nombre 11 contient le nombre 2, qui eſt le dernier *reſte* de ce grade, c'eſt-à-dire, ce qui reſte du nombre 11 après qu'on en a retranché trois fois le nombre 3.

5	3
3	
2	
3	
2	
1	
2	
1	
1	
1	
1	
0	

CONSEQUENCE.

53. MAIS le *retranché* de ce grade, eſt le premier *tout* du grade ſuivant, donc chaque *tout* d'un grade contient autant de fois le premier *tout* du grade ſuivant, qu'il y a de ſouſtractions dans ſon grade, depuis, & y compriſe la ſouſtraction, dont eſt ce *tout*, juſqu'à la derniere incluſivement, *plus* le dernier reſte de ſon grade.

CONSEQUENCE.

54. MAIS le dernier *reſte* de ſon grade, eſt le premier *tout* du grade ſecondement ſuivant, donc chaque *tout* d'un grade contient autant de fois le premier *tout* du grade ſuivant, qu'il y a de ſouſtractions dans ſon grade, depuis, & y compriſe la ſouſtraction, dont eſt ce *tout* juſqu'à la derniere incluſivement, *plus* le premier tout du grade ſecondement ſuivant.

CONSEQUENCE.

55. MAIS le premier *tout* du grade ſecondement ſuivant contient * autant de fois le premier tout du grade troiſiêmement ſuivant, qu'il y a de ſouſtractions dans le grade ſecondement ſuivant, plus le premier *tout* du grade quatriêmement ſuivant : donc chaque *tout* d'un grade contient autant de fois le premier *tout* du grade premierement ſuivant qu'il y a de ſouſtractions dans ſon grade, depuis, & y compriſe la ſouſtraction, dont eſt ce *tout* juſqu'à la derniere incluſivement; plus autant de fois le premier *tout* du grade ſecondement ſuivant, qu'il y a de ſouſtractions dans le grade premierement ſuivant; plus le premier *tout* du grade troiſiêmement ſuivant, autant de fois qu'il y a de ſouſtractions dans le grade ſecondement ſuivant; plus le premier *tout* du grade quatriêmement ſuivant, autant de fois qu'il y a de ſouſtractions dans le grade troiſiêmement ſuivant. Et ainſi de ſuite quelque loin que puiſſe s'étendre le détail d'une raiſon.

56. Donc un *tout* d'un grade antérieur contient le prémier *tout* de chaque grade poſtérieur.

AVERTISSEMENT.

57. POUR ſçavoir ce que vaut un *reſte*, ou un *retranché*, il faut les conſiderer, où ils ſont des *tous*.

Digitized by Google

DE LA PROPORTION.

58. LEs Géometres ont regardé les raiſons des grandeurs, comme une eſpéce de grandeurs, & ils ont dit qu'il y en a d'égales & d'inégales.

59. Deux raiſons géometriques ſeront dites égales, quand le détail des ſouſtractions de l'une ne ſera en rien différent du détail des ſouſtractions de l'autre.

D'où il arrivera que dans les ſouſtractions, qui ſeront en même rang, ou qui ſe feront en même temps de part & d'autre, les *retranchez* ſeront en même temps égaux aux *reſtes*, ou en même temps plus grands, ou en même temps moindres que les *reſtes*. Ainſi la raiſon de 9 à 7 eſt égale à celle de 18 à 14. Et dans les ſouſtractions, qui ſe font en même temps, le *retranché* eſt de part & d'autre > que le *reſte*, ou < que le reſte, ou = au *reſte*.

Détail de la raiſon de 9 à 7		*Détail de la raiſon de 18 à 14*
9	Le *retranché* eſt de part &	18
7	d'autre plus grand que le	14
2	*reſte*.	4
7	Le *retranché* eſt de part &	14
2	d'autre moindre que le *reſte*.	4
5		10
5	Ici de même.	10
2		4
3	Ici le *retranché* eſt plus	6
2	grand que le *reſte*.	4
1		2
2	Le *retranché* eſt de part &	4
1	d'autre égal au *reſte*.	2
1		2
1	Le zero eſt le *reſte* de part	2
1	& d'autre.	2
0		0

Digitized by Google

Je marquerai ainſi l'égalité des raiſons a : b = c : d, & je marquerai ainſi leur inégalité u : x >< y : z.

L'égalité des raiſons s'appelle proportion, & les grandeurs entre leſquelles il y a égalité de raiſons, ſont appellées proportionnelles.

Je marquerai ainſi quatre grandeurs proportionnelles a : b :: c : d, & en nombres, 9 : 7 :: 18 : 14. Et je ſuis peut-être le premier qui ait marqué une raiſon par deux points entre ſes deux termes; parceque j'ai voulu parler ſouvent d'une raiſon ſeule, & que j'ai cru la rendre ainſi plus connoiſſable pour être une raiſon.

PROPOSITION.

THEOREME.

60. TOUTES les fois qu'il y aura quatre grandeurs proportionnelles. a : b :: c : d, elles pourront ſouffrir les changemens des ſignes expoſez dans *45 & 46. les theoremes, * & demeurer proportionnelles. Ainſi outre la proportion + a : + b :: + c : + d, il y aura ces ſept autres proportions, qui ſont ci à côté, ce qui fera en tout huit proportions, dont les quatre premieres ont le ſigne + devant le premier terme, & les quatre autres le ſigne —.

+ a : + b :: + c : + d	
+ a : — b :: — c : + d	
+ a : + b :: — c : — d	
+ a : — b :: + c : — d	
— a : — b :: — c : — d	
— a : + b :: + c : — d	
— a : — b :: + c : + d	
— a : + b :: — c : + d	

J'omets ici le reſte de mes penſées ſur l'eſſence de la raiſon géométrique, & tout mon traité des proportions, qui en eſt la ſuite. Les veritez, que je pourrai maintenant citer de la doctrine des proportions, ſont aſſez connues par Euclide.

Digitized by Google

DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS, OU DE L'EXTRACTION DE LEURS RACINES.

LEMME, qu'il eſt important de bien entendre, & de bien retenir.

PROBLEME.

61. QU'IL faille donner de ſuite autant de *reſtes* par lettres qu'on voudra de la raiſon d'a, à b des racines d'une équation donnée, à commencer par le prémier *reſte*. Soit l'équation donnée $a^2 = 2b^2 - 3ab$.

1°. Il faut mettre ſous le ſigne + tous les termes de l'équation donnée, ainſi $a^2 + 3ab = 2b^2$, & non pas $a^2 = 2b^2 + 3ab$.

2°. Il faut mettre a, & b ſous l'équation à la tête de deux colomnes : ainſi

$$a^2 + 3ab = 2b^2$$
$$a \qquad b$$
$$4 \quad +1 \quad -1 \quad 2$$

Et mettre tout de ſuite dans la colomne qui eſt ſous a, tous les préfix d'a, & dans la colomne, qui eſt ſous b, tous les préfix de b, de tous les *reſtes* de ſuite. Ainſi il faut mettre d'abord l'unité ſous a, & ſous b, car ce ſont * les préfix d'a & de b dans le prémier *reſte*. Et dans ce prémier *reſte*, où l'on ſuppoſe qu'a = 1, & que b auſſi = 1, on trouve que $a^2 = 1$, & que $b^2 =$ auſſi 1, &

que $3ab=3$, donc $a^2+3ab=4$, & il faut mettre 4 à côté de l'unité, qui eſt ſous a, & parceque $2b^2=2$, l'on met 2 du côté de b.

3°. Parceque $4>2$, on met + devant l'unité ſous a, & — devant l'unité ſous b; & ce prémier *reſte** eſt a — b, où l'on ſuppoſe que b a été ſouſtrait d'a.

* &

Or ſoit que cette prémiere ſouſtraction faſſe un grade ou non, il eſt certain* que dans le reſte de la deuxiême ſouſtraction, le préfix d'a eſt encore 1, & que celui de b eſt 2, parceque dans le prémier *reſte* b eſt affecté du ſigne —. Et a valant 1, & b valant 2 dans ce deuxiême *reſte*, & 3ab valant 3.

* 25. & 26.

	a	b	
4	+ 1	— 1	2
7	— 1	+ 2	8

l'on trouve 1 + 6 du côté d'a, & on le met, & le quarré de 2, qui eſt ſous b, étant 4, $2b^2=8$, & on met 8 du côté de b, & 8 étant > 7, c'eſt une preuve qu'on a ſouſtrait a — b de b,

Car de b
retrancher a — b
le *reſte* eſt — a + 2b

Et l'on met + devant b, & — devant a, & c'eſt le deuxiême *reſte*, & dès lors à cauſe* de la diverſité des ſignes, la deuxiême ſouſtraction commence un nouveau grade, daus lequel a — b, prémier *reſte*, a été ſouſtrait de b prémier *retranché*.

* 31.

* 47. Le *reſte* ſuivant ſe formant par l'addition* des préfix précédens, on met 2 ſous a, & 3 ſous b.

	a	b	
4	+ 1	— 1	2
7	— 1	+ 2	8
22	+ 2	— 3	18

Et a valant 2, & b valant 3, donc $a^2+3ab=4+18$, qui eſt 22, qu'on met du côté d'a, & $2b^2=18$, qu'on met du côté de b, & parceque 22 b > 18, c'eſt ſigne qu'on a ſouſtrait — a + 2b de a — b (ce qui eſt aiſé à éprou-

Digitized by Google

ver) & l'on met + devant 2 ſous a, & — devant 3 ſous b, & c'eſt le troiſiême reſte, & à cauſe du changement des ſignes, c'eſt encore le commencement d'un nouveau grade. On continuë par addition des derniers préfix, & l'on met 3 ſous a, & 5 ſous b, & ce ſont les prefix du quatriême *reſte*.

	a	b	
4	+ 1	— 1	2
4	— 1	+ 2	8
22	+ 2	— 3	18
54	+ 3	— 5	50

Où a valant 3, & b valant 5, donc $a^2 + 3ab = 9 + 45$, ce qui vaut 54, & $2b^2 = 50$, & l'on met + du côté du plus fort, & — du côté du plus foible; parceque c'eſt toûjours le plus foible, qui eſt ſouſtrait du plus fort.

Et parceque les ſignes de ce *reſte* ſont pareils à ceux du *reſte* précédent, & que c'eſt une continuation de grade, j'ajoûte les préfix du dernier reſte du grade précédent, qui ſont 1, & 2 aux préfix de ce dernier *reſte*, qui ſont 3 & 5, ce qui fait 4 ſous a, & 7 ſous b, & $a^2 + 3ab = 16 + 84$, ce qui fait 100, & $2b^2 = 98$.

100	+ 4	— 7	98

Et parceque 100 > 98, je mets + devant 4, & — devant 7, & à cauſe de la continuation du grade, je mets 5 ſous a, & 9 ſous b, & la valeur de $a^2 + 3ab$ eſt $25 + 135 = 160$, & celle de $2b^2$ eſt 162.

160	— 5	+ 9	162

Et parceque 162 > 160, je mets — devant 5, & + devant 9, & à cauſe du changement des ſignes, ce qui fait un nouveau grade, les préfix ſuivans ſont 9 ſous a, & 16 ſous b.

	a	b	
160	— 5	+ 9	162
513	+ 9	— 16	512

& $a^2 = 81$, & $3ab = 432$, ce qui fait 513 du côté d'a, & $b^2 = 256$ donc $2b^2 = 512$ du côté de b, & parceque 513 > 512, je mets + devant 9, & — devant 16, ce qui commence un nouveau grade.

Puis continuant ſuivant les mêmes regles, je mets

1246	—14	+25	1250
1198	—23	+41	3362
2446	—32	+57	6498, &c.

C'eſt aſſez, & de reſte pour connoître la nature de cette opération, qui ne peut finir que quand on parvient à une même ſomme de part & d'autre, ce qui n'arrive jamais quand la raiſon d'a à b eſt ſourde, & alors on peut ſeulement donner de ſuite autant de *reſtes* que l'on veut à commencer par le premier, & les derniers *reſtes* de
*21 chaque grade ſont * autant d'approximations.

Les ſommes écrites à droite & à gauche ne ſervent qu'à la ſûreté du calcul, ou pour le revoir, ou pour y avoir recours ſi l'on s'apperçoit de s'être mécompté, ou d'avoir mal placé les ſignes.

AVERTISSEMENT.

62. MAIS pour donner les *reſtes* d'une raiſon, il n'eſt pas neceſſaire que l'équation d'entre a, & b ſoit parfaite.

Par exemple, ſi a eſt la circonférence d'un cercle, & b ſon diamétre, on ne ſçait aucune équation exacte entre a, & b : mais comme Archimede, & des Géometres récens en ont donné, à ce que je crois, autant d'approximations qu'on en peut ſouhaiter, mettant,

a	b
+1	—1

je ſçai que 1 a > 1 b, & ainſi je mets + devant 1 ſous a, & — devant 1 ſous b, & les préfix du deuxiême *reſte* ſeront 1 ſous a, & 2 ſous b, & parceque je ſçai que 1 a > 2 b, je mets + devant 1 ſous a, & — devant 2 ſous b.

Je ſçai encore que a > 3 b, & le troiſiême *reſte* eſt

+1 a —3 b

mais parceque 4 b > a, le quatriême *reſte* eſt

—1 a +4 b

& les préfix du *reſte* ſuivant ſeront 2 & 7, & ainſi de ſuite.

Et il eſt naturel que puiſque dans le détail dune raiſon ſourde,

Digitized by Google

ſourde, les *reſtes* ſont * de continuelles approximations; la connoiſſance des approximations d'une raiſon donne réciproquement le détail de ſes *reſtes*. *

PROPOSITION UNIQUE.

PROBLEME.

63 UNE équation étant donnée, qu'il en faille extraire les racines.

Il a été démontré * que les préfix du dernier *reſte* d'une raiſon expriment cette raiſon, ou ce qui eſt tout un qu'ils en ſont les racines. On a donc extrait les racines d'une équation, quand par la méthode précédente on a trouvé tout le détail de la raiſon qu'ont les racines entre elles. *36

ARTICLE PREMIER.

64 CONTENANT les exemples des équations homogènes, dont les hautes puiſſances ſont l'une dans un membre de l'équation, & l'autre dans l'autre.

EXEMPLE.

$$5y = 12z$$

	y	z	
5	— 1	+ 1	12
10	— 2	+ 1	12
15	+ 3	— 1	12
25	+ 5	— 2	24
35	— 7	+ 3	36
* 60	12	= 5	60

Les ſommes de part & d'autre ſont égales, ſçavoir 60, & 60.

Réſolution. $y = 12$ & $z = 5$.

Et les racines de l'équation ſont ou 12, & 5, ou en raiſon de 12 à 5.

AUTRE EXEMPLE.

$$4y^2 = 9z^2$$

	y	z	
4	— 1	+ 1	9
16	+ 2	— 1	9
36	3	= 2	36

Digitized by Google

Les ſommes de part & d'autre ſont égales 36, & 36.

Réſolution. $y = 3$, & $z = 2$, & les termes de l'équation ſont ou 3 & 2, ou en raiſon de 3 à 2. Je ne répéterai plus que les racines de l'équation ſont ou les derniers prefix, ou en raiſon des derniers préfix. Je me contenterai de marquer la valeur des préfix.

AUTRE EXEMPLE.

Equation.	$7y^2 + 2yz = 5z^2$	
	y : z	
9	+ 1 — 1	5
7 + 4	— 1 + 2	20
28 + 12	— 2 + 3	45
63 + 24	+ 3 — 4	80
175 + 70	— 5 = 7	245

Réſolution. $y = 5$ $z = 7$

AUTRE EXEMPLE.

Equation.	$10y^3 + 14yz^2 + 15zy^2 + 21z^3$	
	y z	
10 + 14	— 1 + 1	15 + 21
80 + 28	+ 2 — 1	60 + 21
270 + 168	3 = 2	270 + 168

Réſolution. $y = 3$, & $z = 2$

AUTRE EXEMPLE.

Equation.	$6y^3 + 13y^2z + 2yz^2 = 5z^3$	
	y z	
6 + 13 + 2	+ 1 — 1	5
6 + 26 + 8	1 = 2	40

Réſolution. $y = 1$, & $z = 2$

AVERTISSEMENT.

IL ſeroit, ce me ſemble, ſuperflu de donner des exemples d'équations plus élevées.

Digitized by Google

Mais ſans aller plus loin on voit 1°. que juſqu'ici ma manière de procéder ne peut réſoudre les équations qu'en nombres entiers, & premiers * entr'eux, & qu'elle peut être fatigante par les multiplications. On verra dans la ſuite qu'elles ſe peuvent éviter en opérant par lettres, & comment ma Méthode peut s'appliquer à réſoudre les équations en nombres rompus, & en nombres compoſés entr'eux, & même en nombres ſourds. * 39.

2°. On voit que je n'ai beſoin ni de faire évanouir de deux inconnues l'une, ni aucun terme de l'équation, ni de réduire à l'unité l'abſolu d'aucune haute puiſſance.

3°. On voit que je manie toujours deux racines, qui peuvent m'être inconnues, ce qui a fait que je les ai marquées par y, & par z, que l'on employe à cet uſage, & deſquelles je découvre la raiſon, ſoient-elles nombre, ou lignes, ou telles grandeurs qu'on voudra. D'où il ſuit que connoiſſant l'une je connoîtrai toujours l'autre. Et je ferai voir comment je réſouds par une fraction les équations, qu'on appelle préparées, où il n'y a qu'une lettre, laquelle exprime une grandeur inconnue.

4°. On voit que cette méthode ne cherche pas directement les racines des équations, mais que par des approximations naturelles, & continuelles, elle trouve les plus petits nombres qui expriment leur raiſon, quand elles ſont en raiſon de nombre à nombre, & que quand elles ſont en raiſon ſourde, elle mene aux nombres, qui approchent de plus en plus de leur raiſon, ſans que leur détail puiſſe finir. Et c'eſt pour cela que j'ai dit * que dans les raiſons de nombre à nombre, on parvient à l'égalité, ou au zero, dans un nombre fini de ſouſtractions : mais que dans les raiſons ſourdes, où les derniers reſtes des grades vont toujours décroiſſant, on va chercher le zero, ou l'égalité dans l'infini, ou dans un nombre infini de ſouſtractions. * 43

AVERTISSEMENT.

UNE manière générale de varier les racines de toute équation, c'eſt d'en multiplier, ou d'en diviſer tous

les termes par un même nombre, car tous leurs équimultiples etant en même raiſon qu'elles, réſoudront comme elles cette équation, & il en eſt de même des quotients de leur diviſion par un même nombre.

AVERTISSEMENT.

65. DE toute équation, dont les abſolus ſont dans chaque membre une même ſomme, les deux racines ſont l'une & l'autre l'unité, parceque l'unité eſt toutes les puiſſances de l'unité. Ainſi dans cette équation $3y^2 = z^2 + 2yz$, où l'abſolu 3 d'une part, & les abſolus $1+2$ de l'autre part font une même ſomme $y = 1$, & $z = 1$, & $3y^2 = 3$, & $z^2 = 1$, & $2yz = 2$, & $z^2 + 2yz = 3$.

DE L'EXTRACTION DES RACINES PAR LETTRES.

AVERTISSEMENT.

66. DANS les opérations précédentes, on ne détermine la place des ſignes dans chaque reſte, qu'après qu'on a évalué les deux membres de l'équation, & l'on met dans chaque reſte le ſigne + du côté du membre le plus fort : mais dans les opérations ſuivantes on détermine chaque reſte, c'eſt-à-dire chaque ſouſtraction par la ſeule inſpection de l'équation, qui découvre preſque toujours lequel des deux termes de l'équation eſt le plus fort ; & c'eſt de celui-là qu'on ſouſtrait le plus foible. Que ſi l'on s'y méprend la ſuite de l'operation en découvre d'abord la mépriſe en tombant dans l'impoſſible. Et quelquefois auſſi l'équation eſt de telle nature, qu'elle peut avoir des ſolutions differentes en ſuppoſant le même terme tantôt plus foible, & tantôt plus fort. Les exemples acheveront d'éclaircir tout cet avertiſſement.

EXEMPLE.

Equation. $5x = 7y$.

Digitized by Google

Dans cette équation $x > y$, autrement $5x$ seroit $< 7y$ contre l'hypothese. Soit donc

$x > y$ & soit $y + z = x$
donc $5y + 5z = 7y$
donc $5z = 2y$
donc $y > z$ soit $z + u = y$
donc $5z = 4z + 2u$
donc $3z = 2u$
donc $u > z$ soit $z + f = u$
donc $3z = 2z + 2f$
donc $z = 2f$
donc $z > f$ soit $f + r = z$
donc $f + r = 2f$
donc $r = f$, où les préfix sont égaux de part & d'autre, & r, & f valant chacun 1, on trouvera en remontant $x = 7$, & $y = 5$

$r = 1$ $u = z + f = 3$
$f = 1$ $y = z + u = 5$
$z = f + r = 2$ $x = y + z = 7$ donc $5x = 7y$.

AVERTISSEMENT.

LEs grades sont fort aisez à appercevoir. Y n'est soustrait qu'une fois, & c'est le prémier grade. Z est soustrait 2 fois, & c'est le deuxiême grade. S n'est soustrait qu'une fois, & c'est le troisiême grade.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $35y^2 + 8yz = 27z^2$
donc $z > y$ soit $y + a = z$
donc $35y^2 + 8y^2 + 8ya = 27y^2 + 54ya + 27a^2$
donc $16y^2 = 46ya + 27a^2$
donc $y > a$ soit $a + b = y$
donc $16a^2 + 32ab + 16b^2 = 46a^2 + 46ab + 27a^2$
donc $16b^2 = 57a^2 + 14ab$
donc $b > a$ soit $a + c = b$
donc $16a^2 + 32ac + 16c^2 = 57a^2 + 14a^2 + 14ac$
donc $55a^2 = 16c^2 + 18ac$
donc $c > a$ soit $a + d = c$

donc $55a^2 = 16a^2 + 32ad + 16d^2 + 18a^2 + 18ad$
donc $21a^2 = 16d^2 + 50ad$
dnoc $a > d$ soit $d + e = a$
donc $21d^2 + 42de + 21e^2 = 16d^2 + 50d^2 + 50de$
donc $21e^2 = 45d^2 + 8de$
donc $e > d$ soit $d + f = e$
donc $21d^2 + 42df + 21f^2 = 45d^2 + 8d^2 + 8df$
donc $21f^2 + 34df = 32d^2$
donc $d > f$ soit $f + g = d$
donc $21f^2 + 34f^2 + 34fg = 32f^2 + 64fg + 32g^2$
donc $23f^2 = 30fg + 32g^2$
donc $f > g$ soit $g + h = f$
donc $23g^2 + 46gh + 32h^2 = 32g^2 + 30g^2 + 30gh$
donc $23h^2 + 16gh = 39g^2$, où la ſomme des préfix eſt la même de part & d'autre, & h, & g étant chacune l'unité, on trouve en rétrogradant $y = 27$, & $z = 35$.

$h = 1$	$a = d + e = 8$	
$g = 1$	$c = a + d = 11$	
$f = g + h = 2$	$b = a + c = 19$	
$d = f + g = 3$	$y = a + b = 27$	$y^2 = 729$
$e = d + f = 5$	$z = y + a = 35$	$z^2 = 1225$
		$yz = 945$

Equation $35y^2 + 8yz = 27z^2$
Valeur $35515 + 7560 = 33075$.

y eſt ſouſtrait une fois, a l'eſt trois fois, d l'eſt deux fois, f l'eſt une fois, & g une fois, ce qui fait cinq grades.

Les valeurs, ou réſolutions étant juſtes, c'eſt une preuve, que les deux operations ont été bien faites, c'eſt-à-dire, que dans le premier exemple, où il a été dit $x > y$, $y > z$, $z > f$, *cela a été vrai, & que les ſignes des reſtes ont été bien placez, & les grades bien diſtincts, & de même dans le deuxième exemple, où il a été dit,* $7 > y$, $y > a$, $b > a$, $c > a$, $a > d$, $c > d$, $d > f$, $f > g$, *cela a été vrai, & que les ſignes des reſtes ont été bien placez, & les grades bien diſtincts. Or de combien les uns de ces nombres ont été plus grands que les autres, cela n'importe, l'erreur de ce calcul*

Digitized by Google

ne ſeroit rien, pourvû qu'il conſte que ceux qui ſont marquez plus grands, le ſoient en effet.

Et il en eſt de même lorſque l'on opere en nombres.

AVERTISSEMENT.

IL faut obſerver que la puiſſance la plus forte eſt dans chaque reſte du côté que la ſomme des préfix eſt plus foible, & c'eſt de celle-là qu'il faut ſouſtraire par ſubſtitution, & par ce moyen la ſomme des préfix de ce même côté devient plus grande. Ce qui revient à fortifier toujours le côté foible des préfix, pour parvenir à en rendre la ſomme égale de part & d'autre: Mais cette régle n'eſt toujours ſûre que dans les équations qui ont toute la régularité des précédentes. Elle manque quelquefois dans les équations d'une autre nature, & la ſeule régle toujours infaillible eſt d'éviter les degrez qui n'ont point de fin contraire à la nature * de la raiſon géométrique, comme l'on verra dans la ſuite. * 15

On verra auſſi que ces deux manieres d'extraire les racines par nombres ou par lettres, s'entr'aident ſouvent l'une l'autre.

ARTICLE SECOND,

Contenant les équations homogenes, où les hautes puiſſances ſont dans un même membre de l'équation.

67. DANS ce ſecond article on a ſouvent des réſolutions différentes en nombres entiers, & premiers entre eux, en mettant indifféremment au deuxiême reſte, z ſous y, ou ſous z, parceque z peut être plus grand & plus petit qu'y.

On parvient auſſi quelquefois à une deuxiême réſolution en continuant l'operation après la prémiere réſolution.

Et lorſqu'il n'eſt pas indifférent de mettre z ſous y, ou ſous z, & qu'en le faiſant il arriveroit que le premier reſte n'auroit pas de fin (ce qui eſt, comme je l'ai déja dit, contre la nature de la raiſon géométrique) c'eſt

parcequ'il n'eſt pas vrai dans toute équation de cette nature, que les deux racines puiſſent indifféremment être l'une plus grande que l'autre.

68. De plus ici contre la régle * il faut quelquefois mettre le ſigne + du côté de la ſomme la moins forte, parcequ'autrement on tomberoit dans un grade qui ne finiroit point, toutes irrégularités qui viennent de l'irrégularité des équations, dans leſquelles l'une des puiſſances n'eſt pas dans l'un des membres, & l'autre dans l'autre. Ce qui fait que l'on conſidere toujours deux choſes à la fois dans chaque reſte, ſçavoir lequel des deux termes eſt le plus grand, ce qui eſt le principal, & laquelle des deux ſommes eſt la plus grande, ou celle du côté, où ſont les puiſſances, ou bien celle du côté, où ſont les produits de leurs degrez parodiques; conſidération, qui doit céder à la prémiere, quand les deux paroiſſent demandet des ſignes differents, ce qui eſt aſſez rare. * 45

EXEMPLE.

$$2y^2 + z^2 = 3yz$$

	y		z	
2 + 1	1	=	1	3

Réſolution. $y = 1$, & $z = 1$

On peut avoir une autre réſolution de cette équation en mettant 2 ſous z.

	y		z	
2 + 1	+ 1	=	− 1	3
2 + 4	+ 1	=	− 2	6

Réſolution. $y = 1$, & $z = 2$

On ne peut plus avoir d'autres racines, ni en mettant 2 ſous y, ni en continuant l'operation.

AUTRE EXEMPLE.

Equation. $y^2 + 6x^2 = 5yx$

	y		x	
7	− 1		+ 1	5
4 + 6	− 2	=	+ 1	10
9 + 6	3	=	1	15

Prémiere

Premiere Réſolution. $x = 1$, $y = 2$

Deuxiême Réſolution. $x = 1$, $y = 3$

Au prémier reſte, ſi ſuivant la régle * j'euſſe mis + devant l'unité ſous y, & — devant l'unité ſous x, il eût fallu mettre 2 ſous x, & le prémier grade n'eût pû finir, à cauſe que le côté d'x eût toujours été le plus fort. Et quant à la deuxiême réſolution, elle s'eſt offerte au reſte ſuivant en continuant le degré. *45

RÉSOLUTION PAR LETTRES.

DE la même équation $y^2 + 6x^2 = 5yx$, ſi y étoit $= x$, donc $7x^2$ feroient $= 5x^2$, ce qui ne ſe peut. Si y étoit $< x$, donc $5yx$ feroient $< 5x^2$ contre l'hypotheſe.

donc $y > x$ ſoit $x + z = y$

donc $x^2 + 2xz + z^2 + 6x^2 = 5x^2 + 5xz$

donc $2x^2 + z^2 = 3xz$, où les préfix de part & d'autre ſont égaux.

$x = 1$

$z = 1$ équation $y^2 + 6x^2 = 5yx$

$y = x + z = 2$ $yx = 2$. valeur $4 + 6 = 10$

En continuant l'équation $2x^2 + z^2 = 3xz$, pour chercher une autre ſolution, ſi elle eſt poſſible, il faut ſuppoſer $z > x$, à cauſe que le préfix de $2x^2$ eſt plus fort que celui de z^2, & que ce ſeroit s'éloigner de l'égalité, de ſuppoſer $x > z$, ce ſeroit tomber dans un grade ſans fin. Soit donc l'équation $2x^2 + z^2 = 3xz$

$z > x$ ſoit $x + u = z$

donc $2x^2 + x^2 + 2xu + u^2 = 3x^2 + 3xu$

donc $u^2 = xu$, les préfix ſont égaux.

$x = 1$

$u = 1$ équation $y^2 + 6x^2 = 5yx$

$z = x + u = 2$ valeur $9 + 6 = 15$

$y = x + z = 3$

La derniere équation étant $= u^2 + xu$, il eſt impoſſible d'aller plus loin.

AUTRE EXEMPLE.

Equation. $y^2 + 21x^2 = 10yx$

	x		y	
21	+ 1		— 1	10
4 + 21	+ 1		— 2	20
9 + 21	+ 1	=	— 3	30
16 + 21	+ 1		— 4	40
25 + 21	+ 1		— 5	50
36 + 21	+ 1		— 6	60
49 + 21	+ 1	=	— 7	70

Prémiere réfolution. $x = 1$, $y = 3$

Deuxiême réfolution. $x = 1$, $y = 7$

La deuxiême folution s'eft preſentée en continuant le degré juſqu'au ſeptiême reſte, c'eſt-à dire tant que les ſommes du côté d'y ont été plus foibles que celles du côté d'x, & il faut ſuppoſer dans le troiſiême reſte que $9 + 21$ du côté d'x eſt > 30 du côté d'y, autrement on tomberoit dans un grade ſans fin.

On n'eût pû trouver une autre réſolution en mettant 2 ſous x.

RESOLUTION PAR LETTRES.

DE la même équation $y^2 + 21x^2 = 10yx$. Si x étoit $= y$, il y auroit $22y^2 = 10y^2$, ce qui ne ſe peut. Si x étoit $> y$, donc $10yx$ ſeroient $< 10x^2$ contre l'hypotheſe : Donc $y > x$, ſoit donc

L'équation $y^2 + 21x^2 = 10yx$

$y > x$ ſoit $x + z = y$

$x^2 + 2xz + z^2 + 21x^2 = 10x^2 + 10xz$

$12x^2 + z^2 = 8xz$

$z > x$ ſoit $x + u = z$

$x^2 + 2xu + u^2 + 12x^2 = 8x^2 + 8xu$

$5x^2 + u^2 = 6xu$, préfix égaux.

$x = 1$

$u = 1$

$z = x + u = 2$. Equation $y^2 + 21x^2 = 10yx$.

$y = x + z = 3$. Valeur $9 + 21 = 30$.

Digitized by Google

Pour trouver une autre ſolution ſur la derniere équation $5x^2 + u^2 = 6xu$; je dois ſuppoſer $u > x$, autrement les préfix du premier membre de l'équation s'écarteroient de l'égalité, & tomberoient dans un grade ſans fin. Il faut donc ſuppoſer $u > x$: Soit donc

l'équation $5x^2 + u^2 = 6xu$

$u > x$ ſoit $x + t = u$

$x^2 + 2xt + t^2 + 5x^2 = 6x^2 + 6xt$

$t^2 = 4xt$

$t > x$ ſoit $x + f = t$

$x + f = 4x$

$f = 3x$

$f > x$ ſoit $x + r = f$

$x + r = 3x$

$r = 2x$

$r > x$ ſoit $x + q = r$

$x + q = 2x$

$q = x$ préfix égaux, & cela ne peut aller plus loin.

$q = 1$ $t = x + f = 4$

$x = 1$ $u = x + t = 5$

$r = x + q = 2$ $z = x + u = 6$ $y^2 + 21x = 10yx$ équation.

$f = x + r = 3$ $y = x + z = 7$ $49 + 21 = 70$ valeur.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $12y^2 + 5z^2 = 19yz$

	y	z	
12 + 5	− 1	+ 1	19
48 + 5	+ 2	− 1	38
108 + 20	+ 3	− 2	114
192 + 45	+ 4	− 3	128
300 + 80	5 =	4	380

Prémiere réſolution. $y = 5$, & $z = 4$

On trouve plutôt une autre réſolution en mettant x ſous z : ainſi

$12y^2 + 5z^2 = 19yz$

	y	z	
12 + 5	+ 1	− 1	19
12 + 20	+ 1	− 2	38
12 + 45	1 =	3	57

Digitized by Google

Deuxiême réſolution. $y=1$, $z=3$.

Pour mettre 2 ſous z le prémier reſte a dû avoir + devant 1 ſous y, & — devant 1 ſous z, & ſi ſelon la régle* j'euſſe mis au ſecond reſte — devant 1, + devant 2, je ſerois tombé dans un grade ſans fin, le côté ſous z eût toujours été le plus fort.

*45.

AUTRE EXEMPLE.

Equation. $28y^2+15z^2=47yz$

	y		z	
28 + 15	— 1		+ 1	47
28 + 60	— 1		+ 2	96
28 + 135	+ 1		— 3	143
112 + 375	+ 2		— 5	470
252 + 735	3	=	7	987

Prémiere réſolution. $y=3$, & $z=7$

On trouve une autre réſolution en mettant 2 ſous y: ainſi,

$28y^2+15z^2=47yz$

	y		z	
28 + 15	— 1		+ 1	47
112 + 15	+ 2		— 1	97
252 + 60	+ 3		— 2	282
448 + 135	+ 4		— 3	564
700 + 240	5	=	4	940

Deuxiême réſolution. $y=5$, $z=4$.

RE'SOLUTION PAR LETTRES.

DE la même équation $28y^2+15z^2=47yz$. Je vois par l'inégalité des préfix des deux membres de cette équation, que $y \gtrless z$: mais je ne vois pas clairement que y ſoit $>$, ni qu'il ſoit $<$ z. Et je puis eſſayer l'une & l'autre de ces ſuppoſitions. Soit donc en premier lieu $z > y$.

Equation. $28y^2+15z^2=47yz$.

$z > y$ ſoit $y+x=z$

$28y^2+15y^2+30yx+15x^2=47y^2+47yx$

Digitized by Google

$15x^2 = 4y^2 + 17yx$

$x > y$ soit $y + u = x$

$15y^2 + 30yu + 15u^2 = 4y^2 + 17y^2 + 17yu$

$15u^2 + 13yu = 6y^2$

$y > u$ soit $u + t = y$

$15u^2 + 13u^2 + 13ut = 6u^2 + 12ut + 6t^2$

$22u^2 + ut = 6t^2$

$t > u$ soit $u + f = t$

$22u^2 + u^2 + uf = 6u^2 + 12uf + 6f^2$

$17u^2 = 11u^2 + 6f^2$ préfix égaux.

$u = 1$

$f = 1$

$t = u + f = 2$

$y = u + t = 3$ équation $28y^2 + 15z^2 = 47yz$

$x = y + u = 4$ valeur $252 + 725 = 987$

$z = y + x = 7$

AUTRE RESOLUTION

De la même Equation, en supposant $y > z$:

$$28y^2 + 15z^2 = 47yz$$

$y > z$ soit $z + x = y$

$28z^2 + 56zx + 28x^2 + 15z^2 = 47z^2 + 47zx$

$28x^2 + 9zx = 4z^2$

$z > x$ soit $x + u = z$

$28x^2 + 9x^2 + 9xu = 4x^2 + 8xu + 4u^2$

$33x^2 + xu = 4u^2$

$u > x$ soit $x + t = u$

$33x^2 + x^2 + xt = 4x^2 + 8xt + 4t^2$

$30x^2 = 4t^2 + 7xt$

$t > x$ soit $x + f = t$

$30x^2 = 4x^2 + 8xf + 4f^2 + 7x^2 + 7xf$

$19x^2 = 4f^2 + 15xf$ préfix égaux

$x = 1$

$f = 1$

$t = x + f = 2$

$u = x + t = 3$

$z = x + u = 4.$ équation $28y^2 + 15z^2 = 47yz$

$y = z + x = 5.$ valeur $700 + 240 = 940$

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE.

$$15y^2 + 24z^2 = 38yz$$

	y	z	
+ 39	— 1	+ 1	38
60 + 24	+ 2	— 1	76
135 + 96	+ 3	— 2	228
240 + 216	+ 4	= — 3	456
575 + 384	+ 5	— 4	760
540 + 600	6	= 5	1140

Prémière réfolution. $y = 4, z = 3$

Deuxiême réfolution. $y = 6, z = 5$

Si au prémier reſte j'euſſe mis les ſignes ſuivant la ré-
*45 gle * le prémier grade n'eût pas eu de fin.

L'on trouve la deuxiême réſolution en continuant le grade, c'eſt-à-dire, en mettant + devant 4, & — devant 3 au quatriême reſte, & + devant 6, & — devant 5 au ſixiême reſte, quoique les ſommes de côté & d'autre n'y conſentent pas. Et ces irrégularités viennent de ce que le quatriême reſte n'eſt pas un véritable reſte fait par une vraie ſouſtraction, mais une réſolution de l'équation en ces deux racines 4 & 3, où il faut ſuppoſer que 240 + 216 du côté d'y > 456 du côté de z, autrement on tomberoit dans un grade ſans fin.

RÉSOLUTION PAR LETTRES.

De la même équation $15y^2 + 24z^2 = 38yz$.

$z > y$ ſoit $y + x = z$

$15y^2 + 24y^2 + 48yx + 24x^2 = 38y^2 + 38yx$

$39y^2 + 24x^2 + 48yx = 38y^2 + 38yz$

$y^2 + 24x^2 + 10yx = 0$, impoſſible. Donc $y > z$

L'équation $15y^2 + 24z^2 = 38yz$

$y > z$ ſoit $z + x = y$

$15z^2 + 30zx + 15x^2 + 24z^2 = 38z^2 + 38zx$

$15x^2 + 39z^2 + 30zx = 38z^2 + 38zx$

Digitized by Google

$15x^2 + z^2 = 8zx$

$z > x$ soit $x + u = z$

$15x^2 + x^2 + 2xu + u^2 = 8x^2 + 8xu$

$+16x^2 + u^2 + 2xu = 8x^2 + 8xu$

$8x^2 + u^2 = 6xu$

$u > x$ soit $x + t = u$

$8x^2 + x^2 + 2xt + t^2 = 6x^2 + 6xt$

$9x^2 + 2xt + t^2 = 6x^2 + 6xt$

$3x^2 + t^2 = 4xt$ préfix égaux

$x = 1$

$t = 1$

$u = x + t = 2$

$z = x + u = 3.$ équation $15y^2 + 24z^2 = 38yz.$

$y = x + z = 4.$ valeur $240 + 216 = 456.$

Pour avoir une autre solution, soit la derniere équation

$$3x^2 + t^2 = 4xt$$

$t > x$ soit $x + f = t$

$3x^2 + x^2\ 2xf + f^2 = 4x^2 + 4xf$

$4x^2 + 2xf + f^2 = 4x^2 + 4xf$

$2xf + f^2 = 4xf$

$2x + f = 4x$

$f = 2x$

$f > x$ soit $x + r = f$

$x + r = 2x$

$x = r$ préfix égaux

$x = 1$

$r = 1$

$f = x + r = 2$

$t = x + f = 3$

$u = t + x = 4$

$z = x + u = 5$ 1ere équation $15y^2 + 24z^2 = 38yz$

$y = x + z = 6$ $540 + 600 = 1140$

Après l'équation $x = r$, il n'y a plus rien à chercher.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $x^3 + 6y^3 = 7xy^2$

	x		y	
1+6	1	=	1	7
8+6	2	=	1	14

Prémière résolution $x = 1, y = 1$
Deuxiême résolution $x = 2, y = 1$

AUTRE EXEMPLE.

$x^3 + 26xy^2 = 9x^2y + 24y^3$

	x		y	
1+26	−1		+1	9+24
8+52	−2	=	+1	36+24
27+78	3	=	1	81+24

Prémière résolution $x = 2, y = 1$
Deuxiême résolution $x = 3, y = 1$

AUTRE EXEMPLE.

$3y^3 + 5z^3 = 5zy^2 + 3yz^2$

	y		z	
8	−1	=	+1	8
24+ 5	+2		−1	20+ 6
81+ 40	−3		+2	90+ 36
375+135	5	=	3	375+135

Prémière résolution $y = 1$, & $z = 1$
Deuxiême résolution $y = 5$, & $z = 3$

AUTRE EXEMPLE.

Equation $10y^3 + 3z^3 = 6zy^2 + 5yz^2$

	y		z	
10+ 3	+1		−1	6+ 5
10+ 24	−1		+2	12+ 20
80+ 81	−2		+3	72+ 90
270+375	3	=	5	270+375

Résolution $y = 3$, & $z = 5$.

Je

Digitized by Google

Je n'ai ſçû trouver d'autres racines en nombres entiers, & premiers entr'eux.

AUTRE EXEMPLE.

Equation. $5y^3 + 12z^3 = 32y^2 + 20yz^2$

	y		z	
5 + 12	— 1		+ 1	3 + 20
40 + 12	2	=	1	12 + 40

Je n'ai pû trouver d'autres racines en nombres entiers, & premiers entr'eux.

AUTRE EXEMPLE.

Equation. $15y^3 + 28z^3 = 21zy^2 + 20yz^2$

	y		z	
15 + 28	— 1		+ 1	21 + 20
120 + 28	+ 2		— 1	84 + 40
405 + 224	+ 3		— 2	378 + 280
960 + 756	— 4		+ 3	1008 + 720
5145 + 3500	7	=	5	5145 + 3500

Réſolution $y = 7$, & $z = 5$

Je n'ai pû trouver d'autres racines en nombres entiers, & premiers entr'eux.

AVERTISSEMENT.

69. DE tout ce que deſſus il eſt viſible que quand dans le détail de la raiſon d'une équation on eſt parvenu à des reſtes, dont les préfix ſont chacun plus grands que chacun des abſolus des puiſſances d'une équation, ſans parvenir à l'égalité, c'eſt une marque que la raiſon que l'on cherche eſt ſourde, parceque dans les équations, les racines ſont, ou les abſolus des puiſſances, ou enveloppées dans ces abſolus.

ARTICLE TROISIÊME.

70. *Contenant les exemples des équations hétérogenes. En cet article, & dans les ſuivans, on parvient quelquefois à plus d'une ſolution, & même à infinies ſolutions: mais il y faut éviter le grade ſans fin.*

EXEMPLE.

Equation $y^2 = z^3$

	y		z	
	— 1	=	+ 1	1
4	+ 2		— 1	1
9	+ 3		— 2	8
16	— 4		+ 3	27
49	— 7		+ 5	125
100	— 10		+ 7	343

Ce troiſiême grade ne peut finir, & il ne paroît pas de deuxiême égalité, & les racines ne ſont peut-être pas des nombres premiers entr'eux: mais comme cette méthode tend toujours à découvrir les racines, ou la raiſon des racines entre elles, il faut les chercher dans les reſtes des deux grades antérieurs, mais ce n'eſt qu'à tâtons qu'on peut découvrir celle, ou celles, où les racines ſont nombres entiers compoſez entr'eux. Le moyen le plus naturel d'y parvenir eſt de multiplier les préfix des reſtes par un commun multiplicateur que je marquerai par la lettre m. Soit donc l'équation $y^2 = z^3$.

	y		z	
	am		bm	
	1	=	1	
	+ 2		— 1	
$9m^2$	+ 3		— 2	$8m^3$

Soit $am = y$, & $bm = z$, & que a & b marquent ſucceſſivement tous les préfix des reſtes, qui ſont ſous eux, & ſoit m leur commun multiplicateur, dont il faut trouver la valeur.

Dans le troiſiême reſte $y = 3m$, & $y^2 = 9m^2$, & $z = 2m$, & $z^3 = 8m^3$, & il faut que $9m^2 = 8m^3$. Je diviſe

Digitized by Google

l'un & l'autre par m^2, & j'ai $9 = 8m$, & diviſant par 8 j'ai $m = \frac{9}{8}$

Donc $y = 3m = \frac{27}{8}$, donc $y^3 = \frac{729}{64}$

$z = 2m = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ $z^3 = \frac{729}{64}$

Si je continue le deuxiême grade, j'aurai 4, & 3 au quatriême reſte.

y^3	$=$	z^3	
y		z	
am		bm	
-1		$+1$	
$+2$		-1	
$+3$		-2	
$16m^2$	$+4$	-3	$27m^3$

& $16m^2 = 27m^3$, en diviſant par m^2 j'aurai $16 = 27m$, & $m = \frac{16}{27}$, & ce grade ne me donnera jamais que des racines en nombres rompus.

Mais ſi je continue le premier grade, j'aurai infinies ſolutions en entiers. Soit donc

L'équation $y^3 = z^3$

y	z	
am	bm	
$1m^2 - 1$	$+1$	$1m^3$ donc $m^2 = m^3$ $m = 1$
$4m^2 - 2$	$+1$	m^3 donc $4m^2 = m^3$

Diviſez par m^2 le quotient eſt $m = 4$, & $2m = 8 = y$, & $y^3 = 64$, & $m^3 = 64 = z^3$

$9m^2 - 3 = +1$ m^3 $9m^2 = m^3$, & diviſant par m^2, $m = 9$, & $m^3 = z^3 = 729$ $= y = 3m = 27$, & $9m^2 = 729$.

$16m^2 - 4 = +1$ m^3 $16m^2 = m^3$, & $m = 16$, & $m^3 = z^3 = 4096$, & $y = 4$, & $y^3 = 16m^2$

& ainſi en continuant toujours ce même grade.

COROLLAIRE.

71. TOUTES les fois qu'on aura un cube, comme 64, dont la racine 4 ſera un quarré, ce cube ſera un autre quarré, dont la racine quarrée 8 ſera un autre cube.

AUTRE EXEMPLE.

Equation.	$2y^2$	$=$	z^3	
	$+1$		-1	
2	-1		$+2$	8
8	-2		$+3$	27
18	-3		$+4$	24

Ce deuxiême grade ne peut finir, & il ne paroît point de racines, parcequ'il n'y en a pas en nombres premiers entr'eux, pour en avoir en nombres composez.

Soit la même équation.

$2y^2 = z^3$	Soit $y = am$, & $z = bm$, a &
y z	b valent successivement tous les
am bm	préfix, qui sont sous eux.
$2m^2 - 1 = +1\,m^3$	$2m^2 = m^3$, donc divisant par m^2, on a $m = 2$, & m^2, ou $y^2 = 4$, & $2y^2 = 8$, & m^3 ou $z^3 = 8$, & les racines sont 2 & 2.
$8m^2 - 2 = +1\,m^3$	Donc $8m^2 = m^3$, donc $m = 8$, & $2m = y = 16$, $m^2 = 64$. $4m^2 = y^2 = 256$, $2y^2 = 512$, $m = 8$, $m^3 = 512 = z^3$, & les racines sont $16 = y$, & $8 = z$
$18m^2 - 3 = +1\,m^3$	Donc $18m^2 = m^3$, donc $= 18$ $3m = y = 54$, $y^2 = 2916$, $2y^2 = 5832$, $z = 18$, $z^3 = 5832$, & les racines sont $54 = y$, & $18 = z$,

& ainsi de suite mettant tous les nombres de suite sous y, & toujours l'unité sous z.

COROLLAIRE.

72. QUAND deux quarrez $2y^2$ sont égaux à un cube z^3, la racine z du cube est double d'un nombre quarré, & la racine de ce quarré multipliant celle du cube, qui est z, produit y racine des 2 quarrez, qui sont égaux au cube z^3. Ainsi prenant 32 double du quarré 16, dont la racine est 4. Si je multiplie 32 par 4, j'aurai 128 racines du quarré 16384, & 2 fois 16384, est 32768, qui est le cube de 32.

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE.

Equation.	y^2	$=$	$2z^1$	
	y		z	
1	-1		$+1$	2
4	$+2$		-1	2
9	-3		$+2$	16
25	-5		$+3$	54
49	-7		$+4$	128

Ce grade ne peut finir, & il en faut conclure que l'équation ne se peut réſoudre en nombres entiers premiers entr'eux.

Soit la même équation

$y^2 = 2z^1$ ſoit $y = am$, & $bm = z$

	am		bm		
m^2	1		1	$2m^1$	$m^2 = 2m^1$, & diviſant par m^2, il revient $1 = m$, donc $m = \frac{1}{2}$ $m^1 = \frac{1}{4} = y$ $2m^1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = z$.
$4m^2$	2	$=$	1	$2m^1$	Diviſant par $2m^2$, j'ai $m = 2$, & $4m^1 = 16 = y^2$, & $2m^1 = 16 = 2z^1$. Les racines ſont $y = 4$, & $z = 2$, & 4 & 2 ſont nombres compoſez.
$9m^2$	3	$=$	1	$2m^1$	Je diviſe par m^2, j'ai $9 = 2m$, & la réſolution ne ſera pas en entiers.
$16m^2$	4	$=$	1	$2m^1$	Et diviſant par $2m^2$, j'ai d'une part $8 = m$ d'autre part; donc am, ou $4m = 32 = y$, & $y^4 = 1024$, & $bm = m = z = 8$, & $z^1 = 512$, & $2z^1 = 1024$.

Et ainſi de ſuite en continuant le grade, c'eſt-à-dire en continuant de mettre 1 ſous bm, qui eſt z, & tous les nombres de ſuite ſous am, qui eſt y, j'aurai à tous les impairs des racines en fractions, & à tous les pairs j'au-

Digitized by

rai des racines qui ſeront des nombres entiers compoſez entr'eux.

COROLLAIRE.

73. SI l'équation eſt de deux autres puiſſances diſtantes d'un ſeul degré, on aura de même en entiers à chaque nombre pair une puiſſance égale à deux puiſſances d'un degré immediatement plus élevé. Ainſi ſi l'équation eſt $y^1 = 2z^4$, ou ſi elle eſt $y^4 = 2z^1$, & ainſi de ſuite on en aura une réſolution en entiers à chaque nombre pair.

COROLLAIRE.

74. TOUTES les fois que vous aurez un quarré égal à deux cubes, vous aurez un quarré égal à deux quarrez cubes. Par exemple 16 eſt un quarré egal à deux cubes, dont chacun eſt 8. Il faut démontrer que $16m^4$ ſera égal à $2m^5$, car diviſant par $2m^2$ vous aurez $8 = m^3$, & $m = 2$, donc $m^5 = 32$, & $2m^5 = 64$ quarré de 8 l'un des cubes.

Pour démontrer que 1024 eſt un quarré égal à deux cubes, dont chacun eſt 512. Je mets $1024m^4 = 2m^5$, & diviſant par $2m^2$ j'ai $512 = m^3$, donc $m = 8$, donc $m^5 = 32768$ & $2m^5 = 65536$ quarré de 256 moitié de l'un des cubes, & non pas l'un des cubes, comme dans l'exemple precedent. Le tout peut être la matiere d'une grande diſcuſſion puiſque ce n'eſt qu'un exemple d'un problême qui peut être varié infiniment en cherchant l'égalité entre des puiſſances de differens degrez.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $y^4 + y^2 = 4z^4$

	Y		Z	
1 + 1	+ 1		− 1	4
1 + 1	− 1		+ 2	16
32 + 4	2	=	3	36

Réſolution $y = 2$, $z = 3$

Si j'euſſe mis autrement les ſignes au premier reſte, le deuxiême grade n'eût pas eu de fin.

Digitized by Google

Je n'ai pû trouver d'autres racines en nombres entiers & premiers entr'eux, mais au deuxiême reſte on peut avoir des racines en nombres ſourds en ſuppoſant $y = ma$, & $z = mb$. Car alors $m^4 + m^2 = 4m^2$, & diviſant par m^2 il y aura $m^2 + 1 = 4$, & retranchant 1 partout, $m^2 = 3$, & $m = r\,3$. Et en continuant le premier grade on peut avoir infinies réſolutions en nombres ſourds.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $y^4 = 3z^2 + 2y$

	y		z	
1	+1		−1	3+2
1	−1		+2	12+2
16	+2		−3	27+4
81	3	=	5	75+6

Réſolution $y = 3, z = 5$

Je n'ai pû trouver d'autres racines en nombres entiers, ni premiers ni compoſez. Je neglige les réſolutions ſourdes.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $4y^2 = 3z^2 + 5yz$

	y		z	
4	+1		−1	8
4	−1		+2	12+10
32	−2		+3	27+30
108	3	=	4	48+60

Réſolution $y = 3$, & $z = 4$

Je n'ai pû trouver d'autres racines en nombres entiers, & premiers entr'eux, mais en poſant $am = y$, & $bm = z$, on aura au prémier reſte deux racines égales, ſçavoir 2 & 2.

$$4y^2 = 3z^2 + 5yz$$

am bm

$4m^3$ 1 1 $8m^2$

donc en diviſant par $4m^2$ $m = 2$, donc am ou $y = 2$, & $y^2 = 8$, $4y^2 = 32$, & bm, ou z, ou $yz = 2$, & m^2 ou bm^2, ou z^2, $= yz = 4$, & $8z^2 = 32$.

AUTRE EXEMPLE.

Equation $y^6 + 2y = 2z^3 + z^3$

y z

1+2 1 = 1 2+1

Prémière réſolution $y = 1$, & $z = 1$

On trouve une autre réſolution en mettant + devant l'unité ſous y, & — devant l'unité ſous z, & par conſequent en mettant 2 ſous z au deuxiême reſte.

Equation $y^6 + 2y = 2z^3 + z^3$

	y		z	
1+2	+1		−1	2+1
1+2	+1		−2	16+4
1+2	−1		+3	54+9
64+4	−2		+5	250+25
729+6	3	=	7	686+49

Deuxiême réſolution $y = 3$, & $z = 7$

Si au deuxiême reſte j'euſſe mis 1 + 2, je ſerois tombé dans un grade infini. Il eſt impoſſible d'avoir d'autres réſolutions.

ARTICLE IV.

SECTION PREMIERE.

75. *Quand l'une des puiſſances eſt accompagnée d'un abſolu.*

EXEMPLE.

Equation $7x + 5 = 3y$

x y

7+5	+1		−1	3
7+5	+1		−2	6
7+5	+1		−3	9
7+5	1	=	4	12

Réſolution $x = 1$, $z = 4$

AVERTISSEMENT.

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

IL eſt évident qu'en cette équation, où 7x eſt accompagné de l'abſolu 5, la raiſon x : y que je vais appeller *indirecte*, eſt differente de la raiſon x : y que j'appellerai *raiſon directe* dans l'équation ſans abſolu $7x = 3y$, & que dans ces équations accompagnées d'un abſolu, la raiſon indirecte eſt d'autant plus approchante de la raiſon directe que l'abſolu eſt plus petit. Or il n'eſt pas impoſſible qu'il y ait en differents nombres entiers, & premiers entr'eux pris deux à deux, plus d'une raiſon indirecte par un même abſolu, & dans la même équation, ce qui fait plus d'une réſolution de cette équation, & quelquefois infinies réſolutions. Mais pour y parvenir il faut encore ici s'écarter de la régle * qui met le ſigne + du côté le plus fort; car autrement on n'aboutiroit jamais qu'aux mêmes racines. *45.

Et pour ce qui eſt du choix des reſtes, deſquels il faudra changer les ſignes, c'eſt-à-dire mettre + du côté le plus foible, il faut, pour avoir plus d'une réſolution en nombres entiers, que la raiſon des racines pures, c'eſt-à-dire la raiſon directe, ſe continue indépendamment de l'abſolu. Et ainſi dans le reſte, où eſt la prémiere égalité, il faut pour aller à une ſeconde, mettre + où il doit être, ſans avoir égard à l'abſolu. Et dans le reſte, où eſt cette deuxiême égalité, il faut en uſer de même, ſi on veut aller à une troiſiême, & ainſi de ſuite.

Ainſi dans l'exemple précédent, & dans le ſecond reſte, dont les préfix ſont + 1 ſous x, & — 2 ſous y, & où le membre de l'équation du côté d'x vaut 7 + 5, & celui du côté d'y ne vaut que 6, & 7 + 5 étant diminué de 5, eſt 7, qui eſt > 6; Si donc dans ce deuxiême reſte je veux changer les ſignes & mettre — 1 + 2, je ne parviendrai point à une égalité. Soit pour le faire voir,

L'équation $7x + 5 = 3y$

	x	y	
7 + 5	+ 1	— 1	5
7 + 5	— 1	+ 2	6
14 + 5	+ 2	— 3	9
21 + 5	+ 3	— 5	15

tized by Google

En continuant j'ajouterai toujours 7 de ce côté-ci qui eſt le plus fort.

Je n'ajouterai que 6 de ce côté-ci qui eſt le plus foible, & qui demeurera toujours le plus foible.

Et il n'y aura point d'égalité.

Et de même ſi dans ce même exemple, & dans le prémier reſte, ou encore du côté d'x, $7+5$, diminué de 5 eſt > 3, qui eſt du côté d'y, je change les ſignes $-1+1$, je ne parviendrai jamais à l'égalité.

Figure 3e. $7x+5=3y$

	x		y	
$7+5$	-1		$+1$	5
$7+5$	$+1$		-2	6
$14+5$	$+2$		-3	9
$21+5$	$+3$		-4	12

De ce côté-ci qui eſt le plus fort, j'ajoute toujours 7.

De ce côté-ci qui eſt le plus foible, je n'ajoute que 3, & ainſi ce côté ſera toujours le plus foible, & point d'égalité.

Mais ſi dans le même exemple, & dans le troiſiême reſte, où les préfix ſont $+2-3$, à cauſe que du côté d'x il y a $7+5$, & de l'autre côté 9, & que 9 eſt plus fort que 7, ou que $7+5$ diminué de 5, je change les ſignes, je parviendrai à une deuxiême égalité. Ainſi.

Figure 4e. Equation. $7x+5=3y$

	x		y	
$7+5$	$+1$		-1	5
$7+5$	$+1$		-2	6
$7+5$	-1		$+3$	9
$14+5$	$+2$		-5	15
$21+5$	$+3$		-8	24
$28+5$	4	=	11	33

Deuxiême réſolution $x=4$, & $y=11$

Digitized by Google

Et dans ce dernier détail, & dans le quatriême reſte, où 14 du côté d'x eſt plus petit que 15 du côté d'y, ſi je change les ſignes je parviendrai à une troiſiême égalité. Ainſi.

Figure 5e. $7x+5=3y$

	x	y	
7+5	+ 1	— 1	3
7+5	+ 1	— 2	6
7+5	— 1	+ 3	9
14+5	— 2	+ 5	15
21+5	+ 3	— 7	21
35+5	+ 5	—12	36
49+5	+ 7	—17	51
63+5	+ 9	—22	66
77+5	+11	—27	81
91+5	+13	= —32	96

Que ſi dans la même équation $7x+5=3y$, & dans ſon quatriême reſte, où eſt la réſolution, ou l'égalité, je veux donner des ſignes aux termes, & mettre + 1 — 4, ou — 1 + 4, & continuer l'operation, je n'en aurai point de ſolution. Et premiérement que je mette + 1 ſous x, & — 4 ſous y, ce qui ſera continuer le même grade. Ainſi.

Figure 6e. $7x+5=3y$

	x	y	
7+5	+ 1	— 1	3
7+5	+ 1	— 2	6
7+5	+ 1	— 3	9
7+5	+ 1	— 4	12
7+5	— 1	+ 5	15
14+5	— 2	+ 9	27

Dès le cinquiême reſte je commence un nouveau grade, dans lequel à chaque nouveau reſte j'ajouterai 7 du côté d'x, qui eſt le plus foible, donc dans tous les reſtes, le côté d'y ſera le plus fort, & l'abſolu 5 n'égalera jamais l'excès du côté plus fort, donc je ne parviendrai pas à l'égalité.

2°. Si je mets — 1 ſous x, & + 4 ſous y en changeant de grade dès le quatriême reſte, il faudra que je le continue ſans pouvoir jamais parvenir à l'égalité. Ainſi.

Figure 7e. $7x+5=3y$

	x	y	
7+5	+1	— 1	3
7+5	+1	— 2	6
7+5	+1	— 3	9
7+5	—1	+ 4	12
14+5	—2	+ 7	21
21+5	—3	+10	30

J'ajouterai toujours 7 du côté d'x, qui eſt le plus foible, & toujours 9 du côté d'y, qui eſt le plus fort, & l'abſolu 5 ſera toujours moindre que l'excès du côté le plus fort, donc je ne parviendrai jamais à l'égalité en nombres entiers.

Mais ſi je veux des racines en fractions, ou en nombres compoſez entr'eux, j'en trouverai infinies en fractions, & quelques-unes en nombres compoſez entr'eux.

Et premiérement dans le troiſiême reſte du prémier grade dans la prémière figure, où il y a +1 — 3, ſi je mets +1m — 3m, j'aurai 7m+5 d'une part, & 9m de l'autre part. Ainſi

7m+5 +1m —3m 9m

& ôtant 7m de part & d'autre, il reſtera $2m = 5$, & $m = \frac{5}{2}$, & $x = \frac{5}{2}$, & $7x = \frac{35}{2}$, & $7x+5 = \frac{45}{2}$ d'une part, & $y = \frac{15}{1}$, & $3y = \frac{45}{2}$ d'autre part. Et ſi je contique ce prémier grade j'aurai ainſi infinies ſolutions en fractions.

Que ſi je change les ſignes du troiſiême reſte dans la quatriême figure, ce qui formera un deuxiême grade, j'aurai dans le quatriême reſte une ſolution en entiers compoſez entr'eux: car ayant dans ce reſte +2 — 5, ſi je mets +2m — 5m, j'aurai d'une part 14m+5, & de l'autre j'aurai 15m, & ôtant 14m de part & d'autre, j'aurai $m = 5$, & x étant $= 2m$, vaudra 10, & 7x+5 vaudront 75, & de l'autre part y vaudra 5m, ou 25, & 3y vaudra 75, où les racines 5 & 25 ſont des nombres compoſez.

Digitized by Google

Et après avoir changé les ſignes du quatriême reſte dans la cinquiême figure, j'aurai au ſixiême reſte + 7 — 12, qui me donnera une autre ſolution en entiers compoſez; car d'une part j'aurai 35m + 5, & de l'autre 36m, donc m = 5, & x = 5m, ou 25, & 7x + 5 = 180, où les racines 25 & 60 ſont des nombres compoſez. Je n'ai point cherché d'autres racines au de-là de 13 & de 32, qui ſont celles de la cinquiême figure.

AUTRE EXEMPLE,

Où l'une des puiſſances eſt accompagnée d'un abſolu.

Equation $3y^2 = 5z^2 + 7$

	y		z	
3	— 1		+ 1	5 + 7
12	+ 2	=	— 1	5 + 7
27	+ 3	=	— 2	20 + 7
48	+ 4		— 3	45 + 7
75	— 5		+ 4	80 + 7
243	— 9		+ 7	245 + 7
507	+ 13	=	— 10	500 + 7

Cette équation $3y^2 = 5z^2 + 7$, a trois réſolutions dans ces ſept reſtes. Or à chaque réſolution c'eſt une raiſon indirecte, qui ceſſe, de ſorte que dans ces ſept reſtes, la prémière raiſon indirecte a ceſſé au deuxiême reſte, & ſes racines ont été $y = z$, & $1 = z$. La deuxiême raiſon indirecte a ceſſé au troiſiême reſte, & ſes racines ont été $3 = y$, & $2 = z$, & la troiſiême raiſon indirecte a ceſſé au ſeptiême reſte, & ſes racines ſont $13 = y$, & $10 = z$. Quant à la raiſon directe, elle n'eſt point finie, puiſqu'en aucun de ces ſept reſtes il n'y a d'égalité indépendamment de l'abſolu; mais la raiſon directe eſt allée le même train que les indirectes, parceque les ſignes ſont placez dans ces ſept reſtes, comme ils doivent l'être indépendamment de l'abſolu 7, car par-tout où il y a + du côté de z, le côté de z ſans l'abſolu eſt plus fort que le côté d'y, & par-tout où il y a + du côté d'y, le côté d'y eſt plus fort que le côté de z ſans l'abſolu. Or toutes les fois que des équations du ſecond degré,

Digitized by Google

dont les puiſſances ſont l'une dans un membre de l'équation & l'autre dans l'autre, & dont l'une eſt accompagnée ou affectée d'un abſolu, toutes les fois, dis-je que ces ſortes d'équations ont une ſolution, elles en ont une infinité, ce que je démontrerai dans la ſuite, & maintenant je vais en donner quelques exemples. Il en faut pourtant excepter celles, où l'un des membres eſt un quarré ſeulement, & l'autre membre un quarré, dont le préfix ſoit un nombre quarré, & qui ſoit accompagné d'un abſolu, comme ſeroit $9x^2 + 13 = z^2$.

RESOLUTION PAR LETTRES

De la même Equation.

$$zy^2 = fz + 7$$

$y > z$ ſoit $z + x = y$

$3z^2 + 6xz + 3x^2 = 5z^2 + 7$

$3x^2 + 6xz = 2z^2 + 7$. Préfix égaux.

$x = 1$ prémière équation $3x^2 + 6xz = 2z^2 + 7$

$z \quad 1$ $\quad 3 + 6 = 2 + 7$

Et remontant

$y = z + x = 2$. Deuxiême équation $3y^2 = 5z^2 + 7$

$12 = 5 + 7$

Pour continuer il faut prendre la derniére équation.

$3x^2 + 6xz = 2z^2 + 7$

$z > x$ ſoit $x + u = z$

$3x^2 + 6x^2 + 6xu = 2x^2 + 4xu + 2u^2 + 7$

$7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$ préfix égaux.

$x = 1$ troiſiême équation $7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$

$u = 1$ $\quad 7 + 2 = 2 + 7$

Et remontant

$z = x + u = 2$ quatriême équation $3y^2 = 5z^2 + 7$ pareille

$y = x + z = 3$ $\quad 27 = 20 + 7$ à la 1ere.

Pour continuer encore

$7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$

$u > x$. ſoit $x + t = u$

$7x^2 + 2x^2 + 2xt = 2x^2 + 4xt + t^2 + 7$

$7x^2 = 2t^2 + 2xt + 7$.

Si je ſubſtituois à x, dont le préfix eſt le plus foible, je tomberois dans l'impoſſible.

$t > x$ soit $x + f = t$

$7x^2 = 2x^2 + 4xf + 2f^2 + 2x^2 + xf + 7$

$3x^2 = 2f^2 + 6xf + 7$

$x > f$ soit $f + r = x$

$3f^2 + 6fr + 3r^2 = 2f^2 + 6f^2 + 6fr + 7$

$3r^2 = 5f^2 + 7$

$r > f$ soit $f + q = r$

$3f^2 + 6fq + 3q^2 = 5f^2 + 7$

$3q^2 + 6fq = 2f^2 + 7$ préfix égaux

$q = 1$ cinquiême équation $3q^2 + 6fq = 2f^2 + 7$

$1 = 1$ $3 + 6 = 2 + 7$

Et remontant

$r = f + q = 2$

$x = f + r = 3$

$t = f + x = 4$ sixiême équation $7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$

$u = x + t = 7$ $63 + 42 = 98 + 7$

Et remontant encore

$z = x + u = 10$ septiême équation $3y^2 = 5z^2 + 7$

$y = z + x = 13$ valeur $507 = 500 + 7$

Et puisque cette équation $3q^2 + 6fq = 2f^2 + 7$ est pareille à l'équation $3x^2 + 6xz = 2z^2 + 7$, je puis la continuer comme l'équation $3x^2 + 6xz = 2z^2 + 7$ a été continuée, & comme j'ai mis $z + x$, & $x + u = z$, & comme cela a fait l'équation $7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$

Je puis mettre

$f > q$ soit $q + p = f$

Et sans calculer supposer cette équation

$7q^2 + 2qp = 2p^2 + 7$

$q = 1$ huitiême équation $7q^2 + 2qp = 2p^2 + 7$

$p = p$ $7 + 2 = 2 + 7$

Et remontant

$f = q + p = 2$ neuviême équation pareille à la prémière.

$r = f + q = 3$ $3r^2 = 5f^2 + 7$

$27 = 20 + 7$

Et remontant encore

$x = f + r = 5$

$t = x + f = 7$ dixiême équation $7x^2 + 2xu = 3u^2 + 7$

$u = x + t = 12$ $175 + 120 = 288 + 7$

gitized by Google

Et remontant encore

$z = x + u = 17$ onziême équation $3y^2 = 5z^2 + 7$

$y = z + x = 22$ $1452 = 1445 + 7$.

Je puis encore reprendre l'équation $7q^2 + 2qp = 2p^2 + 7$, & ſans calculer de nouveau la continuer comme l'équation $7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$ a été continuée & ſuppoſer

$p > q$	ſoit $q + o = p$
$o > q$	ſoit $q + n = o$
$q > n$	ſoit $n + m = q$
$m > n$	ſoit $n + l = m$

Et ſuppoſer cette équation $3l^2 + 6nl = n^2 + 7$, où $n = 1$, & $l = 1$, & ſans m'arrêter à chaque équation, je puis remonter aux deux, qui ſont toujours les plus fortes, ſçavoir, $7x^2 + 2x^2 = 2u^2 + u$, & $3y^2 = 5z^2 + 7$. Ainſi

$n = 1$	$r = q + f = 13$	
$l = 1$	$x = f + r = 23$	$x^2 = 529$
$m = n + l = 2$	$t = x + f = 33$	
$q = m + n = 3$	$u = x + t = 56$	$u^2 = 3136$
$o = q + n = 4$	12e équation $7x^2 + 2xu = 2u^2 + 7$	
$p = q + o = 7$	$3703 + 2576 = 627^2 + 7$ valeur.	
$f = q + p = 10$		

Et remontant ou rétrogradant.

$z = x + u = 79$ treiziême équation $3y^2 = 5z^2 + 7$

$y = y + z = 102$ $31212 = 31205 + 7$

& ainſi toujours à l'infini.

AUTRE EXEMPLE,

Qui fut propoſé par Monſieur de Fermat.

76. Equation $13z^2 + 1 = y^2$

$y > z$ ſoit $z + x = y$

$13z^2 + 1 = z^2 + 2zx + x^2$

$12z^2 + 1 = 2zx + x^2$

$x > z$ ſoit $z + u = x$

$12z^2 + 1 = 2z^2 + 2zu + z^2 + 2zu + u^2$

$9z^2 + 1 = 4z^2 u + u^2$

$u > z$ ſoit $z + r = u$

$9z^2 + 1 = 4z^2 + 4zr + z^2 + 2zr + r^2$

$4z^2 + 1$

Digitized by Google

$4z^2+1=6zr+r^2$

$z>r$ soit $r+q=z$

$4r^2+8rq+4q^2+1=6r^2+6qr+r^2$

$4rq+4q^2+1=3r^2$

$r>q$ soit $q+p=r$

$2q^2+2qp+4q^2+1=3q^2+6qp+3p^2$

$3q^2+1=4qp+3p^2$

$q>p$ soit $p+o=q$

$3p^2+6po+3o^2+1=4p^2+4op+3p^2$

$2po+3o^2+1=4p^2$

$p>o$ soit $o+n=p$

$2o^2+2on+3o^2+1=4o^2+8on+4n^2$

$o^2+1=6on+4n^2$

$o>n$ soit $n+m=o$

$n^2+2mn+m^2+2=6n^2+6nm+4n^2$

$m^2+1=9n^2+4nm$

$m>n$ soit $n+l=m$

$n^2+2nl+l^2+1=9n^2+4n^2+4nl$

$l^2+1=12n^2+2nl$

$l>n$ soit $n+k=l$

$n^2+2nk+k^2+1=12n^2+2n^2+2nk$

$k^2+1=13n^2$

$k>n$ soit $n+h=k$

$n^2+2nh+h^2+1=13n^2$

$2nh+h^2+1=12n^2$

$h>n$ soit $n+g=h$

$2n^2+2ng+n^2+2ng+g^2+1=12n^2$

$4ng+g^2+1=gn^2$

$g>n$ soit $n+f=g$

$4n^2+4nf+n^2+2nf+f^2+1=gn^2$

$6nf+f^2+1=4n^2$

$n>f$ soit $f+e=n$

$6f^2+6fe+f^2+1=4f^2+8fe+4e^2$

$3f^2+1=2fe+4e^2$

$f>e$ soit $e+d=f$

$3e^2+6ed+3d^2+1=2e^2+2ed+4e^2$

$4ed+3d^2+1=3e^2$

$e>d$ soit $d+b=e$

$4d^2+4db+3d^2+1=3d^2+6db+3b^2$

Donc $4d^2+1=2bd+3b^2$

Les préfix ſont égaux de part & d'autre, & l'on trouve z = 180, & y = 649.

b = 1	n+m=o = 33	
d = 1	n+o=p = 38	
b+d=e = 2	p+o=q = 71	
d+e=f = 3	q+p=r = 109	
f+e=x = 5	q+r=z = 180	$z^2 = 32400$
n+f=g = 8	z+r=u = 289	
n+g=h = 13	z+u=x = 469	
n+h=k = 18	z+x=y = 649	
n+k=l = 23	z+x=y = 649	
n+l=m = 28		

$y^2 = 421201 = 13z^2 + 1$

Pour continuer je ſuppoſe d > b ainſi

équation $4d^2 = 2bd + 3b^2$

d > b — ſoit b + a = d

$4b^2 + 8ba + 4a^2 + 1 = 2b^2 + 2ba + 3b^2$

$4a^2 + 6ba + 1 = b^2$

b > a — ſoit a + c = b

$4a^2 + 6a^2 + 6ac + c = a^2 + 2ac + c^2$

$9a^2 + 4ac + 1 = c^2$

c > a — ſoit a + β = c

$9a^2 + 4a^2 + 4ab + 1 = a^2 + 2a\beta + \beta^2$

$12a^2 + 2a\beta + 1 = \beta^2$

β > a — ſoit a + γ = β

$12a^2 + 2a^2 + 2a\gamma + 1 = a^2 + 2a\gamma + 1 = a^2 + 2a\gamma + \gamma^2$

$13a^2 + 1 = \gamma^2$

Equation qui eſt ſemblable à la prémière

$13z^2 + 1 = y^2$, a vaut 180, & γ 649, & remontant

β = a+γ = 829	o = n+m = 42837
c = a+β = 1009	p = n+o = 49322
b = a+c = 1189	q = p+o = 92159
d = a+b = 1369	r = p+q = 141481
e = b+d = 2558	z = r+q = 233640
f = e+d = 3927	u = z+r = 375121
n = f+e = 6485	x = z+u = 608761

Digitized by Google

$g = n + f = 10412$ $y = z + x = 842401$
$h = n + g = 16897$ $z^2 = 54587649600$
$k = n + h = 23382$ $y^2 = 709639444801$
$l = n + k = 29867$ Pour continuer il faudroit mettre cette derniere valeur de z pour celle d'α, & cette derniere valeur d'y pour celle de γ, ſuppoſer $\beta = a + \gamma$ & achever de remonter par c, b, d, &c. juſqu'à y comme on vient de faire, & ainſi de ſuite à l'infini.
$m = n + l = 36352$

AUTRE EXEMPLE,

$$13z^2 = y^2 + 1$$

Dans lequel après ſix ſouſtractions on trouvera que $z = 5$, & qu'$y = 18$, & en continuant on trouvera après quatorze autres ſouſtractions, & en remontant que $z = 5985$, & qu'$y = 21582$, & ainſi à l'infini.

AUTRE EXEMPLE.

$$13z^2 + 3 = y^2$$

Dans lequel après trois ſouſtractions on trouvera que $z = 1$, & qu'$y = 4$. Et après dix autres ſouſtractions, & en remontant on trouve $z = 71$, & $y = 256$, & ainſi à l'infini.

AUTRE EXEMPLE,

Où l'une des puiſſances eſt accompagnée du plan des racines, & d'un abſolu.

Equation $48y^2 = 48x^2 + 16xy + 3$

$y > x$ ſoit $x + z = y$
$48x^2 + 96xz + 48z^2 = 48x^2 + 16x^2 + 16xz + 3$
$48z^2 + 80xz = 16x^2 + 3$
$x > z$ ſoit $z + u = x$
$48z^2 + 80z^2 + 80zu = 16z^2 + 32zu + 16u^2 + 3$
$112z^2 + 48zu = 16u^2 + 3$
$u > z$ ſoit $z + t = u$
$112z^2 + 48z^2 + 48zt + 16z^2 + 32zt + 16t^2 + 3$
$144z^2 + 16zt = 16t^2 + 3$
$t > z$ ſoit $z + f = t$

$144z^2+16z^2+16zf=16z^2+32zf+16f^2+3$

$144z^2=16f^2+16zf+f$

$f>z$ soit $z+r=f$

$144z^2=16z^2+32zr+96r^2+16z^2+16zr+3$

$112z^2=16r^2+48zr+3$

$r>z$ soit $z+q=r$

$112z^2=16z^2+32zq+16q^2+48z^2+48zq+3$

$48z^2=16q^2+80zq+3$

$z>q$ soit $q+p=z$

$48q^2+96qp+48p^2=16q^2+80q^2+80qp+3$

$48p^2+16qp=48q^2+3$

$q>p$ soit $p+o=q$

$48p^2+16p^2+16po=48p^2+96po+48o^2+3$

$16p^2=48o^2+80po+3$

$p>o$ soit $o+n=p$

$16o^2+32no+16n^2=48o^2+80on+3$

$16n^2=112o^2+48no+3$

$n>o$ soit $o+m=n$

$16o^2+32om+16m^2=112o^2+48o^2+48om+3$

$16m^2=144o^2+16om+3$

$m>o$ soit $o+l=m$

$16o^2+32ol+16l^2=144o^2+16o^2+16ol+3$

$16l^2+16ol=144o^2+3$

$l>o$ soit $o+k=l$

$16o^2+32ok+16k^2+16o^2+16ok=144o^2+3$

$16k^2+48ok=112o^2+3$

$k>o$ soit $o+i=k$

$16o^2+32oi+48o^2+48oi=112o^2+3$

$16i^2+80oi=48o^2+3$

$o>i$ soit $i+h=o$

$16i^2+80i^2+80ih=48i^2+96ih+48h^2+3$

$48i^2=48h^2+16ih+3$, équation ſemblable à la prémière, laquelle ſe réſoudra en une autre ſemblable, & ainſi à l'infini.

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE,

Où les deux puiſſances ſont affectées.

Equation $4y^2+1=yz+z^2$

$z > y$ ſoit $y+e=z$

$4y^2+1=y^2+ye+y^2+2ye+e^2$

$2y^2+1=e^2+13ye$

$y > e$ ſoit $e+f=y$

$2e^2+4ef+2f^2+1=e^2+3e^2+3ef$

$2f^2+ef+1=2e^2$

$e > f$ ſoit $f+g=e$.

$2f^2+f^2+fg+1=2f^2+4fg+2g^2$

$f^2+1=2g^2+3fg$

$f > g$ ſoit $g+h=f$

$g^2+2gh+h^2+1=2g^2+3g^2+3gh$

$h^2+1=4g^2+gh$

$h > g$ ſoit $g+k=h$

$g^2+2gh+k^2+1=4g^2+g^2+gk$

$k^2+gk+1=4g^2$

$k > g$ ſoit $g+l=k$

$g^2+2gl+l^2+g^2+gl+1=4g^2$

$l^2+3gl+1=2g^2$

$g > l$ ſoit $l+m=g$

$l^2+3l^2+3lm+1=2l^2+4lm+2m^2$

$2l^2+1=lm+2m^2$

$m=1$ $y=e+f=16$. $y^2=256$

$l=1$ $z=e+y=25$. $z^2=625$

$g=l+m=2$ équation $4y^2+1=yz+z^2$

$k=g+l=3$ $1024+1=400+625$

$h=g+k=5$

$f=g+h=7$

$e=f+g=9$

Cette équation $4n^2+1=p^2+np$ étant pareille à la prémière $4y^2+1=z^2+yz$, où j'ai trouvé $y=z$, & $z=25$. Je puis ſuppoſer $n=16$, & $p=25$, & $o=n+p=41$, remonter par m, l, g, &c. juſqu'à $z=y+e$. Ainſi

$n=16$ $k=g+l=203$

$p=25$ $h=g+k=333$

$o = n + p = 41$ $\quad f = g + h = 463$
$m = n + o = 57$ $\quad e = f + g = 593$
$l = m + n = 73$ $\quad y = e + f = 1056$
$g = l + m = 130$ $\quad z = y + e = 1649$
$y^2 = 1115136 . z^2 = 2719201$
$4y^2 = 4460544$
$yz = 1741344$

$4y^2 + 1 = 4460545 = z^2 + yz = 4460545$ & ainſi à l'infini.

AVERTISSEMENT.

77. TOUTES les équations ſemblables de quelque grade qu'elles ſoient, ſe réſoudront de même, ſi elles peuvent être réſoluës en nombres entiers. Qu'il faille réſoudre cette équation cubique :

Equation $37z^3 + 1 = y^3$

$y > z$ $\quad$ ſoit $z + x = y$
$37z^3 + 1 = z^3 + 3z^2x + 3zx^2 + x^3$
$36z^3 + 1 = 3z^2x + 3zx^2 + x^3$
$x > z$ $\quad$ ſoit $z + u = x$
$36z^3 + 1 = 3z^3 + 3z^2u + 3z^3 + 6z^2u + 3zu^2 + z^3 + 3z^2u + 3zu^2 + u^3$
$29z^3 + 1 = u^3 + 12z^2u + 6zu^2$
$u > z$ $\quad$ ſoit $z + f = u$
$29z^3 + 1 = z^3 + 3z^2f + 3zf^2 + f^3 + 12z^3 + 12z^2f + 6z^3 + 12z^2f + 6zf^2$
$10z^3 + 1 = f^3 + 27z^2f + 9zf^2$
$z > f$ $\quad$ ſoit $f + r = z$
$10f^3 + 30f^2r + 30fr^2 + 10r^3 + 1 = f^3 + 27f^3 + 54f^2r + 27fr^2 + 9f^3 + 9f^2r$
$r > f$ $\quad$ ſoit $f + q = r$
$10f^3 + 30f^2q + 30fq^2 + 10q^3 + 3f^3 + 6f^2q + 33q^2 + 1 = 27f^3 + 33f^3 + 33f^2q$

$q = 1$ $\quad z = 2 + r = 3$
$f = 1$ $\quad u = z + f = 4$
$r = f + q = 2$ $\quad x = z + u = 7$
$y = z + x = 10$ $\quad y^3 = 1000$

Je n'ai rien à affirmer des deuxiêmes racines, dès que

Digitized by Google

l'équation paſſe le deuxiême degré : mais s'il y en a on les trouvera de la même maniere que dans les équations du deuxiême degré. Je n'en ai pas cherché à cette équation.

ARTICLE IV.

SECTION DEUXIÉME,

78. *Où les hautes puiſſances ſont hétérogenes, & dont l'une eſt accompagnée d'un abſolu.*

EXEMPLE.

Equation $x^3 = z^2 + 4$

x	z	
1	−1	+1	1+4
8	+2	−1	1+4
27	+3	−2	4+4
64	+4	−3	9+4

Ce grade ne peut finir, & la réſolution ne paroît pas. Il faut eſſayer 2 ſous z.

Equation $x^3 = z^2 + 4$

x	z	
1	+1	−1	1+4
1	+1	−2	4+4
1	−1	+3	9+4
8	−2	+5	25+4
27	−3	+7	49+4
64	−4	+9	81+4
125	5	= 11	121+4

Réſolution $x = 5$, & $z = 11$.

En mettant 2 ſous z, l'unité qui eſt au deſſus doit être affectée du ſigne −, & le prémier reſte eſt + 1 − 1, quant au deuxiême reſte ſi j'euſſe mis − 1 + 2 je ſerois tombé dans un grade infini, il a donc fallu mettre + 1 − 2, & la ſuite eſt conforme à la regle, qui met le ſigne + du plus fort côté. Or ſoit qu'on continue le grade ou qu'on en change, on ne parviendra plus à l'égalité. Le côté de x ſera toujours le plus fort. En cette réſolution les racines ſont des nombres prémiers entr'eux.

Autrement.

Equation $x^3 = z^2 + 4$ soit $\frac{z}{y} = x$

$$\frac{z^3}{y^3} = z^2 + 4$$

$$z^3 = z^2y^3 + 4y^3$$

	z		y	
1	−1		+1	1+4
8	2	=	1	4+4

$z = 2, \quad y = 1$

$x = \frac{z}{y} = \frac{2}{1} \cdot x^3 = 8 \cdot z^3 = 4 \cdot z^3 + 4 = 8 = x^3$

Soit que l'on continue le grade ou qu'on en change, on ne parviendra pas à une autre égalité. Au prémier cas le côté de x sera toujours le plus fort, au deuxiême cas ce sera le côté de z qui sera le plus fort.

Ici x & z valant chacun 2 ne sont pas nombres prémiers entr'eux, ce qui fait voir qu'une même équation peut avoir des solutions differentes en nombres prémiers & en nombres composez non multiples des prémiers.

AUTRE EXEMPLE,

Equation $x^3 = z^2 + 2$

	x		z	
1	−1		+1	1+2
8	+2		−1	1+2
27	+3		−2	4+2

Ce grade ne peut finir. Il faut essayer 2 sous z

Equation $x^3 = z^2 + 2$

	x		z	
1	+1		−1	1+2
1	−1		+2	4+2
8	+2		−3	9+2
27	3	=	5	25+2

Au troisiême reste si je mets $-2+3$, le quatriême reste sera $+3-4$, & commencera le troisiême grade qui ne pourra finir, il faut donc mettre au troisiême reste

Digitized by Google

reſte + 2 — 3, & le reſte ſuivant donnera 3, & 5 racines de l'équation. Mais ſoit que l'on continue le grade ou qu'on en change, on ne parviendra pas à une nouvelle égalité, le côté de x ſera toujours le plus fort.

Et on ne peut trouver aucune autre réſolution de cette équation ni en entiers ni en rompus.

Ces deux dernieres équations ſont dans le commentaire de Bachet ſur la dix-neuviême queſtion du livre ſixiême de Dioſphante, où elles ſont réſoluës par des methodes particulieres, à quoi M. de Fermat ajoute que le quarré 25 eſt le ſeul, qui avec 2 faſſe un cube, qui eſt 27, & qu'on en a infinies ſolutions par la methode de Bachet, & cela eſt vrai, mais par des équations toujours differentes. Dans une de ſes lettres il dit qu'il n'y a que ces deux quarrez 4, & 121, qui avec 4, faſſent chacun un cube, ſçavoir 8 & 125. Ces propoſitions univerſelles & negatives furent fort admirées.

79. Ces découvertes ſont auſſi aiſées qu'inutiles. Par exemple je prends au hazard 8 & 9, où le quarré ſurpaſſe le cube de l'unité, ce qui eſt $y^2 = z^3 + 1$. Ma methode m'en donne les racines $y = 3$, & $z = 2$, & ne m'en donne point d'autres.

Equation	$y^2 = z^3 + 1$			
	y		z	
1	— 1		+ 1	1 + 1
4	+ 2		— 1	1 + 1
9	3	=	2	8 + 1
Reſolution	$y = 3$		$z = 2$	

On ne peut pas dans le deuxiême reſte mettre 2 ſous z, car le cube excéderoit le quarré. On ne peut pas auſſi continuer l'operation ni en continuant le grade, ni en changeant de grade, quelque parti que l'on prenne, le cube excédera toujours le quarré, 9 eſt donc le ſeul quarré qui excede de l'unité un cube qui eſt 8.

80. Les cinq exemples ſuivans ſont pris du quatriême problême du livre troiſiême des Elemens d'Algébre de M. Ozanam, où les lettres a & b ſont des nombres

arbitraires, & x & z des nombres inconnus. Le Problême eſt tel.

PROBLÊME.

Egaler au quarré une puiſſance où la lettre inconnue ait quatre dimenſions.

PREMIER EXEMPLE,

Où la puiſſance n'a que les deux prémiers termes.

Equation $abx^4 + ab\,x^3 = z^2$ ſoit $a=1$. $b=3$. $z=xy$

donc $3x^4 + 9x^3 = x^2y^2$ diviſez par x^2
donc $3x^3 + 9x = y^2$

	x	y	
3+9	+1	−1	1
3+9	+1	−2	4
3+9	+1	−3	9
3+9	−1	+4	16
12+18	−2	+7	49

Ce deuxiême grade ne peut finir, ce qui prouve que les racines x & y ne ſont pas nombres entiers prémiers entre eux, & en effet on va voir que les racines x & y ſont 9 & 18. L'on ne peut mettre 2 ſous x, parceque x ſeroit toujours > y, ce qui n'eſt pas vrai, puiſque $y^2 > 3x^2$ (*équat.*) Il faut donc chercher la réſolution dans l'un des trois reſtes du prémier grade. Or la raiſon x : y ne peut être 1 : 1, eſſayons ſi elle peut être 1 : 2. Si x : y :: 1 : 2 donc $2x = y$, donc $4x^2 = y^2$: mais y^2 (*équat.*) $= 3x^2 + 9x$, donc $4x^2 = 3x^2 + 9x$, donc $x^2 = 9x$, donc $x = 9$, donc $x^2 = 81$, donc $3x^2 = 243$, & $9x = 81$, donc $3x^2 + 9x = 243 + 81 = 324$, dont la racine eſt $18 = y$, & multipliant le tout par 81, qui eſt xx, on aura la réſolution de l'équation propoſée. Je ne la donnerois pas pour un exemple de l'extraction d'une racine quarré-quarrée, mais d'une racine quarrée ſimplement.

Cherchons encore une réſolution dans le troiſiême reſte. Soit $y : x :: 3 : 1$, donc $y = 3x$, & $3x^2 = y^2 = 3x^2 + 9x$, donc $9x^2 = 3x^2 + 9x^2$, donc $6x^2 = 9x$, donc $6x = 9$, donc $x = \frac{9}{6} = \frac{1}{2}$. $xy = 3x$ (*équation*) $= \frac{9}{2}$.

Digitized by Google

Cherchons dans le quatriême reſte du même grade continué $x : y :: 1 : 4$, donc $4x = y$, donc $16x^2 = y^2$: mais $3x^2 + 9x = y^2$, donc $16x^2 = 3x^2 + 9x$, donc $13x^2 = 9x$, donc $13x = 9$, donc $x = \frac{9}{13}$. On aura auſſi en nombres rompus infinies réſolutions en continuant le prémier grade, & on en aura de même dans le deuxiême grade. Ainſi dans le cinquiême reſte doit $x : y :: 2 : 7$, donc $7x = 2y$, donc $49x^2 = 4y^2$; mais $y^2 = 3x^2 + 9x$, donc $4y^2 = 12x^2 + 36x$, donc $37x^2 = 36x$, donc $37x = 36$, donc $x = \frac{36}{37}$.

RÉSOLUTION

D'un autre cas de la même équation.

Equation $abx^4 + abbx^3 = z^3$. Soit $a = 3$. $b = z$. $z = xy$

$$6x^4 + 12x^3 = x^3y^3$$
$$6x^2 + 12x = y^3$$

	x	y	
6 + 12	+ 1	— 1	1
6 + 12	+ 1	— 2	4
6 + 12	+ 1	— 3	9
6 + 12	+ 1	— 4	16
6 + 12	— 1	+ 5	25
24 + 24	— 2	+ 9	81

Ce grade ne peut finir, & il n'y peut avoir de réſolution en entiers que dans les reſtes du prémier grade. La raiſon $y : x$ ne peut être ny $1 : 1$, ny $1 : 2$, qui ſont les deux prémiers reſtes. Dans le troiſiême $1 : 3 :: x : y$, donc $3x = y$, & $9x^2 = y^2$, mais (*équat.*) $6x^2 + 12x = y^2$, donc $9x^2 = 6x^2 + 12x$, donc $3x^2 = 12x$, donc $3x = 12$, donc $x = \frac{12}{3}$, ce qui donne une réſolution en fractions, & parceque $\frac{12}{3} = 4$, c'eſt auſſi une réſolution en entiers, où $x = 4$, & $x^2 = 16$, & $6x^2 = 96$, & $12x = 48$, & $6x^2 = 12x = 96 + 48 = 144 = y^2$, donc la racine eſt $12 = y$. Les racines ſont donc 4 & 12 nombres compoſez entre eux.

Eſſayons encore dans le quatriême reſte la proportion $y : x :: 4 : 1$, où $4x = y$, & $16x^2 = y^2$, mais (*équat.*) y^2

$= 6x^2 + 12x$, donc $16x^2 = 6x^2 + 12x$; donc $10x^2 = 12x$, donc $10x = 12$, donc $x = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$. Et de même on peut trouver infinies ſolutions en fractions.

DEUXIÉME EXEMPLE,

Où il n'y a que les trois prémiers termes, & dont le prémier & le troiſième ſont quarrez.

Equation $x^4 = ax^3 + bbxx = x^2$ ſoit $z = xy$
$x^4 + bbxx = x^2y^2 + ax^3$ ſoit $a = 3$, & $b = 2$

donc diviſant par x^2 $x^2 + 4 = y^2 + 3x$

	x		y
1 + 4	— 1	+ 1	1 + 3
4 + 4	+ 2	— 1	1 + 6
9 + 4	3 =	2	4 + 9
	$x = 3$	$y = 2$	

Et ſi l'on multiplie le tout par 9 qui $= xx$, on aura la réſolution de l'équation propoſée.

$x^4 - 3x^3 + 4xx = y^2x^2 = z^2$

$81 - 81 + 36 = 36$, dont la racine eſt $6 = z$.

Si j'euſſe mis 2 ſous y, la réſolution eût été impoſſible. Cette équation ne mene à aucune réſolution en fractions.

AUTRE RESOLUTION

De la même Equation.

Equation $x^4 + bbxx = z^2 + ax^3$. Soit $a = 2$, & $b = 3$, & $z = xy$
$x^4 + 9xx = y^2 + 2x^3$
donc diviſant par x^2 $x^2 + 9 = y^2 + 2x$

	x	y	
1 + 9	+ 1	— 1	1 + 2
1 + 9	+ 1	— 2	4 + 2
1 + 9	— 1	+ 3	9 + 2

Ce grade ne peut finir, & ſi je mets 2 ſous x, le deuxiême grade commencera au deuxiême reſte, & ne pourra finir. J'eſſaye de racourcir le prémier grade en mettant + devant 2.

Digitized by Google

Equation $x^2+9=y^2+2x$

	x	y	
1+9	+1	−1	1+2
1+9	−1	+2	4+2
4+9	2	3	9+4

$x=2 \quad y=3$

Et ſi l'on multiplie le tout par 4, qui eſt xx, on aura la réſolution de l'équation propoſée.

Equation $x^4-2x^3+9xx=x^2y^2$.

Réſolution $16-16+36=4\times 9=36$.

TROISIEME EXEMPLE,

Où ſont tous les termes.

Equation $x^4-2ax^3+5aaxx-6abbx+b^4=z^2$. $a=1$. $b=2$

$$x^4-2x^3+5xx-24x+16=z^2$$

$$x^4+5xx+16=z^2+2x^3+24x$$

	x	z	
1+ 5+16	+1	−1	1+ 2+24
1+ 5+16	−1	+2	1+ 2+24
16+20+16	−2	+3	9+16+48
81+45+16	3 =	4	16+54+72

$x=3$, & $z=4$

Si j'euſſe mis 2 ſous x, je n'euſſe pas trouvé de réſolution. La ſomme de chaque part eſt 142.

AUTRE RESOLUTION.

$a=1$, & $b=1$

Equation $x^4+5aaxx+1=z^2+2ax^3+6abbx$

$$x^4+5xx+1=z^2+2x^3+6x$$

	x	z	
1+ 5+1	−1	+1	1+ 2+ 6
16+20+1	+2	−1	1+16+62
81+45+1	+3	−2	4+54+18

Ce grade ne peut finir. J'eſſaye 2 ſous z, & par conſequent je mets — devant l'unité ſous z.

Equation $x^4+5x^2+1=z^2+2x^3+6x$

	x	z	
1 + 5 + 1	+ 1	— 1	1 + 2 + 6
1 + 5 + 1	— 1	+ 2	9 + 2 + 6
16 + 20 + 1	2 =	3	9 + 16 + 12

$x = 2 \quad z = 3$

Equation $x^4 - 2x^3 + 5xx - 6x + 1 = z^2$

Réſolution $16 - 16 + 20 - 12 + 1 = 9$

QUATRIÈME EXEMPLE,

Où le quatrième terme manque.

Equation $x^4 + 2ax^3 - bbxx + aabb$

$x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 4 = z^2$

$x^4 + 2x^3 + 4 = z^2 + 4x^2$ ſoit $a = 1$, & $b = 2$

	x	z	
1 + 2 + 4	+ 1	— 1	1 + 4
1 + 2 + 4	— 1	+ 2	4 + 4
16 + 16 + 4	+ 2	— 3	9 + 16
81 + 54 + 4	+ 3	— 5	25 + 36

Ce grade ne peut finir, & ſi je mettois 2 ſous x ce ſeroit pis. Il n'eſt pas poſſible auſſi de trouver la réſolution de cette équation dans les deux prémiers reſtes. La proportion $z : x :: 1 : 1$ eſt viſiblement fauſſe, & la proportion $z : x :: 2 : 1$ ne l'eſt pas moins. Car ſoit $z = 2x$, donc $z^2 = 4x^2$, donc $z^2 + 4x^2 = 8x^2$, mais (*équat.*) $x^4 + 2x^3 + 4 = z^2 + 4x^2$, donc $x^4 + 2x^3 + 4 = 8x^2$.

$x^4 + 2x^3 + 4 = 8x^2$ ſoit $x = \frac{u}{y}$

$\frac{u^4}{y^4} + 2\frac{u^3}{y^3} + 4 = 8\frac{u^2}{y^2}$

$u^4 + 2u^3y + 4y^4 = 8u^2y^2$

	u	y	
1 + 2 + 4	— 1	+ 1	8
16 + 16 + 4	+ 2	— 1	32
81 + 108 + 16	— 3	+ 2	288
625 + 750 + 24	— 5	+ 3	1800

Ce troiſième grade ne peut finir : & par les deux

Digitized by Google

prémiers grades il paroît que la raiſon $u : y > 1 : 1$, & $< 2 : 1$, & ainſi x, qui eſt $= \frac{u}{y}$, n'eſt pas un entier. Pour revenir à l'équation propoſée,

Je ne puis racourcir aucun des prémiers grades, qui n'ont chacun qu'un reſte, & ſi j'allongeois le ſecond, les nombres ſous z n'excederoient que de l'unité ceux qui ſeroient ſous x, & la raiſon iroit toujours croiſſant. Il faut donc allonger le prémier grade, & l'allonger en tâtonant.

Equation $x^4 + 2x^3 + 4 = z^2 + 4x^2$

x	z
+ 1	— 1
+ 1	— 2
+ 1	— 3
+ 1	— 4
— 1	+ 5
2	9

Si je le termine au troiſiême reſte, & que je mette au quatriême $-1+4$, j'aurai au neuviême reſte 2 ſous x, & 7 ſous z, ce qui fera $2 : 5 :: x : z$, & $2z = 5x$, & $4z^2 = 25x^2$, & $4z^2 + 16x^2 = 41x^2$: mais $4z^2 + 16x^2 = 4x^4 + 8x^3 + 16$, donc $4x^4 + 8x^3 + 16 = 41x^2$.

Equation $4x^4 + 8x^3 + 16 = 41x^2$ ſoit $x = \frac{u}{y}$

$$4\frac{u^4}{y^4} + 8\frac{u^3}{y^3} + 16 = 41\frac{u^2}{y^2}$$

$$4u^4 + 8u^3y + 16y^4 = 41u^2y^2$$

	u	y		
4 +	8 + 16	— 1	+ 1	41
64 +	64 + 16	— 2	+ 1	164
324 +	216 + 16	+ 3	— 1	369
2500 +	2000 + 64	+ 5	— 2	1025

Ce grade ne peut finir, & ainſi la raiſon u : y n'eſt pas multiple, & $\frac{u}{y}$ n'eſt pas en nombre entier. Je reviens à l'équation propoſée.

Si j'en termine le prémier grade au quatriême reſte, & que je mette $-1+5$ au cinquiême reſte, j'aurai au ſixiême reſte 2 ſous x, & 9 ſous z, & la proportion ſera $2:9::x:z$, & $2z=9x$, & $4z^2=81x^2$, & $4z^2+16x^2=4x^4+8x^3+16$, donc en ce cas $4x^4+x^3+16=97x$.

Equation $4x^4+8x^3+16=97x^2$ ſoit $x=\frac{u}{y}$

$$4\frac{u^4}{y^4}+8\frac{u^3}{y^3}+16=97\frac{u^2}{y^2}$$

$$4u^4+2u^3y+16y4=97u^2y^2$$

	u	y	
$4+8+16$	-1	$+1$	97
$64+64+16$	-2	$+1$	388
$324+216+16$	-3	$+1$	873
$1024+512+16$	$4 = $	1	1552

$u=4$. $y=1$. $x=\frac{u}{y}=\frac{4}{1}=4$

$x:z::2:9::4:18$. $z=18$. $z^2=324$

Equation $x^4+2x^3-4x^2+4=z^2$

Réſolution $256+128-64+4=324$

CINQUIE'ME EXEMPLE,

Où le Deuxième terme manque.

Equation $x^4+2aaxx-aabx+aabb=z^2$. $b=2$. $a=1$

$x^4+2a^2x^2+2abb=z^2+aabx$

$x^4+2x^2+8=z^2+2x$

	x	z	
$1+2+8$	$+1$	-1	$1+2$
$1+2+8$	$+1$	-2	$4+2$
$1+2+8$	$1 = $	3	$9+2$

$x=1$; $z=3$

Equation $x^4+2a^2x^2-a^2bx+a^2b^2=z^2$

Réſolution $1+2-2+8=9$

SIXIEME

Digitized by Google

SIXIEME EXEMPLE,

Où le troisième & le quatrième termes manquent.

$x^4 - 4ax^3 + 16a^4 = z^2$

$x^4 + 16a^4 = 4ax^3 + z^2$ soit $a = 1$

$x^4 + 16 = z^2 + 4x^3$

	x	z	
1 + 16	+ 1	— 1	1 + 4
1 + 16	+ 1	— 2	4 + 4
1 + 16	+ 1	— 3	9 + 4
1 + 16	— 1	+ 4	16 + 4
16 + 16	2	+ 7	49 + 23

Ce grade ne peut finir, & quelque eſſai que l'on faſſe, on ne peut trouver de réſolution qu'en prenant la proportion dans le prémier reſte $1 : 1 . z : x$. donc $z = x$, & $z^2 = x^2$, & $z^2 + 4x^3 = x^2 + 4x^3$, ce qui eſt (*équat.*) $= x^4 + 16$.

$x^4 + 16 = x^2 + 4x^3$ soit $x = \frac{u}{y}$

$\frac{u^4}{y^4} + 16 = \frac{u^2}{y^2} + 4\frac{u^3}{y^3}$

$u^4 + 16y^4 = u^2y^2 + 4u^3y$

	u	y	
1 + 16	— 1	+ 1	1 + 4
16 + 16	— 2	+ 1	4 + 32
81 + 16	— 3	+ 1	9 + 108
256 + 16	4	1	16 — 256

$u = 4 . y = 1 . x = \frac{u}{y} = \frac{4}{1} = 4$

Equation $x^4 - 4x^3 + 16a^4 = z^2 . z = 4$

Réſolution $256 - 256 + 16 = 16$

Le cas qui ſuit dans M. Ozanam eſt celui où le deuxième & le troiſième termes manquent. Je me ſuis arrêté là, parcequ'il ne m'a pas été aſſez facile de trouver quelque hypothèſe, dont la réſolution fût en nombres entiers.

gitized by Google

ARTICLE IV.

SECTION DEUXIÉME.

81. *Des Fractions dans les Equations.*

EXEMPLE,

Où les deux Racines ſont des Fractions.

Equation $3y^2=3x^2+xy+\frac{12}{16}$. ſoit $y=\frac{z}{u}$, & $x=\frac{r}{q}$

$$y^2=\frac{z^2}{u^2}x^2=\frac{r^2}{q^2}xy=\frac{zr}{uq}$$

Et mettant tout à même dénomination.

$$y^2=\frac{z^2q^2}{u^2q^2}x^2=\frac{u^2r^2}{u^2q^2}xy\frac{zruq}{u^2q^2}$$

& prenant $u^2q^2=z$ dénominateur de la fraction $\frac{12}{16}$ qui eſt dans l'équation propoſée, d'autant que 16 n'a pas d'autre aliquote que 4, qui eſt un quarré, il réſulte que $u^2=4$, & que $q^2=4$, & que $u=2$, & $q=2$ ſi bien que

$$y^2=\frac{z^2q^2}{u^2q^2}=\frac{4z^2}{16}x^2=\frac{u^2r^2}{u^2q^2}=\frac{4r^2}{16}xy=\frac{4zr}{16}$$

& l'équation propoſée $3y^2=3x^2+xy+\frac{12}{16}$ eſt réduite à $\frac{12z^2}{16}=\frac{12r^2}{16}+\frac{4zr}{16}+\frac{12}{16}$. Diviſant par 4, $\frac{3z^2}{16}=\frac{3r^2}{16}+\frac{zr}{16}\ +\frac{3}{16}$

Et multipliant par 16.

$3z^2=3r^2+zr+3$ équation à réſoudre.

$z>$ ſoit $r+a=z$

$3r^2+6ra+3a^2=3r^2+r^2+ra+3$

$3a^2+5ra=r^2+3$

$r>a$ ſoit $a+b=r$

$3a^2+5a^2+5ab=a^2+2ab+b^2+3$

$7a^2+3ab=b^2+3$

$b>a$ ſoit $a+c=b$

$7a^2+3a^2+3ac=a^2+2ac+c^2+3$

$9a^2+ac=c^2+3$

$c>a$ ſoit $a+d=c$

Digitized by Google

$9a^2+a^2+ad=a^2+2ad+d^2+3$

$9a^2=d^2+ad+3$

$d > a$ soit $a+e=d$

$9a^2=a^2+2ae+e^2+a^2+ae+3$

$7a^2=e^2+3ae+3$ préfix égaux.

$a=1$

$e=1$

$d=a+e=2$

$c=a+d=2$

$b=a+c=4$

Et évaluant z & r dans l'équation $\frac{12z^2}{16}=\frac{12r^2}{16}+\frac{42r}{16}+\frac{12}{16}$, l'équation sera

$$\frac{432}{16}=\frac{300}{16}+\frac{120}{16}+\frac{12}{16}$$

Equation proposée $3y^2=3x^2+xy+\frac{12}{16}$.

Résolution $\frac{432}{16}=\frac{300}{16}+\frac{120}{16}+\frac{12}{16}$.

AUTRE EXEMPLE,

Où les deux racines sont des fractions.

Equation $4y^3+\frac{100}{200}=20x^2+xy$.

Si l'on ne prenoit pour fraction que l'une des racines y ou x, on ne parviendroit pas à une résolution. Soit donc

$4y^3+\frac{100}{200}=20x^2+xy$, & soit $y=\frac{z}{u}$, & $x=\frac{r}{q}$

$$4\frac{z^3}{u^3}+\frac{100}{200}=20\frac{r^2}{q^2}+\frac{2r}{uq}$$

& mettant le tout à même dénomination

$$4\frac{z^3q^2}{u^3q^2}+\frac{100}{200}=\frac{20u^3r^2}{u^3q^2}+\frac{2rqu^2}{u^3q^2}$$

& cherchant les aliquotes des 200, j'y trouve 8, qui est un cube, & 25 qui est un quarré, dont le produit

eſt $u^1q^2=200$, & $u=2$, & $q=5$, & évaluant par-tout u & q, j'ai

$$\frac{100z^3}{200}+\frac{100}{200}=\frac{160r^3}{200}+\frac{20zr}{200},$$

& multipliant par 200, j'ai

$$100z^3+100=160r^2+20zr,$$

& diviſant par 5, j'ai

$20z^3+20=32r^2+4zr$, dont il faut extraire les racines

$r > z$	ſoit $z+a=r$
$20z^3+20=32z^2+64za+32a^2+4z^2+4za$	
$z > a$	ſoit $a+b=z$
$20a^3+60a^2b+60ab^2+20b^3+20=32a^2+64ab+32b^2$	
	$64a^2+64ab$
	$32a^2$
	$4a^2+8ab+4b^2$
	$4a^2+4ab$
$20a^3+60a^2b+60ab^2+20b^3+20=136a^2+140ab+36b^2$	
$b > a$	ſoit $a+c=b$
$20a^3$	
$60a^3+60a^2c$	$136a^2$
$60a^3+120a^2c+60ac^2$	$140a^2+140ac$
$20a^3+60a^2c+60ac^2+20c^3+20$.	$36a^2+72ac+36c^2$
$160a^3+240a^2c+120ac^220c^3+20=312a^2+212ac+36c^2$.	

Les ſommes des préfix ſont égales.

$a=1$

$c=1$

$b=a+c=2$

$$y=\frac{z}{u}=\frac{3}{2}y^3=\frac{27}{8}x=\frac{r}{q}=\frac{4}{5}x^2=\frac{16}{25}yx=\frac{yr}{uq}=\frac{12}{10}.$$

Ces trois fractions réduites à même dénomination ſont

$$y^3=\frac{675}{200}z^2=\frac{128}{200}yx=\frac{240}{200}$$

Equation propoſée $4y^3+\frac{100}{200}=20z^2+yx$.

Digitized

Réſolution $\frac{2700}{200}+\frac{100}{200}=\frac{2560}{200}+\frac{240}{208}$

AUTRE EXEMPLE,

82. *Où l'une des racines eſt une fraction.*

Soit l'équation $3y^2=30x^2+\frac{30}{25}$

ſoit $y=\frac{z}{u}$, & $x=\frac{r}{q}$

$$y^2=\frac{z^2}{u^2}x^2=\frac{r^2}{q^2}$$

réduiſant à même dénomination

$$y^2=\frac{z^2q^2}{u^2q^2}x^2=\frac{q^2u^2}{u^2q^2}$$

Equation propoſée $3y^2=30x^2+\frac{30}{25}$

réformée ainſi $3\frac{z^2q^2}{u^2q^2}=30\frac{r^2u^2}{u^2q^2}+\frac{30}{25}$

& prenant $u^2q^2=25$, d'autant que 25 n'a point d'aliquote, qui ſoit nombre quarré, $q^2=25$, & $u^2=1$, ou bien $q^2=1$, & $u^2=25$. Mais cette derniere ſuppoſition ne menant pas à réſolution, il faut ſuppoſer $q^2=25$, & $q=5$, & $u^2=1$, & $u=1$, & évaluant q & u,

l'équation $\frac{3z^2q^2}{u^2q^2}=\frac{30r^2u^2}{u^2q^2}+\frac{30}{25}$

ſe réduit à $\frac{75z^2}{25}=\frac{30r^2}{25}+\frac{30}{25}$

donc multipliant tout par 25

$$75z^2=30r^2+30$$

& diviſant par 5

$15z^2=6r^2+6$, dont il faut extraire les racines

$r>z$ ſoit $z+a=r$

$15z^2=6z^2+12za+6a^2+6$

$9z^2=6a^2+12za+6$

$z>a$ ſoit $a+b=z$

$9a^2+18ab+9b^2=6a^2+12a^2+12ab+6$

$9b^2+6ab=9a^2+6$, préfix égaux,

$a=1$ $\quad 15z^2=6r^2+5$

$b=1$ $\quad 60=54+6$

$z=a+b=2$. $z^2=4$

$r=a+z=3$. $r^2=9$

$y=\frac{z}{a}=\frac{2}{1}=2$. $y^2=4$. $x=\frac{r}{q}=\frac{3}{5}x^2=\frac{9}{25}$

réduisant à même dénomination

$$y^2=\frac{100}{25} \cdot z^2=\frac{9}{25}$$

Equation proposée $3y^2=30x^2+\frac{30}{25}$

Résolution $\frac{300}{25}=\frac{270}{25}+\frac{20}{25}$

où y l'une des racines, est un nombre entier, sçavoir 2, & l'autre racine est $\frac{3}{5}$ nombre rompu.

ARTICLE IV.

SECTION QUATRIÉME;

DE LA RESOLUTION

83. *Des doubles, triples, & multiples Equations de tous les Degrez.*

JE multiplie ensemble les équations données. Le produit doit être une puissance du même degré que les données, & je cherche la raison qui est entre la grandeur inconnue & la racine de ce produit, dont je ne connois que le degré.

Je commence par quelques exemples de doubles équations. Je mettrai Q pour dire quarré.

EXEMPLE.

x	$+12=Q$
x	$+5=Q$
$5x$	$+60$
x^2+12x	

$x^2+17x+60=z^2$ produit des 1ers. quarrez.

Il en faut extraire les racines x & z.

Digitized by Google

Le quarré 81 eſt le prémier quarré plus grand que la ſomme des préfix, qui ſont du côté d'x. Je mets $x^2+17x+60=81$, & ôtant 60 de part & d'autre, il reſte $x^2+17x=21$, ce qui ne ſe peut en entiers. Je mets 100, & ôtant 60 reſte $x^2+17x=40$, ne ſe peut en entiers, je mets 121. De 121 ôtant 60, reſte $x^2+17x=51$ qui ne ſe peut en entiers, je mets 144. De 144 ôtant 60, reſte 84. Je l'eſſaye,

$$x^2+17x=84$$

ſoit $x=\frac{u}{y}$

$$\frac{u^2}{y^2}+17\frac{u}{y}=84$$

$$u^2+17yu=84y^2$$

$u>y$

ſoit $y+f=u$

$$y^2+2yf+f^2+17y^2+17yf=84y^2$$

$$f^2+2yf+y^2+17y^2+17fy=84y^2$$

$$f^2+19yf=66y^2$$

$f>y$

ſoit $y+r=f$

$$y^2+2yr+r^2+19y^2+19yr=66y^2$$

$$r^2+21yr=46y^2$$

$r>y$

ſoit $y+q=r$

$$y^2+2yq+q^2+21y^2+21yq=46y^2$$

$q^2+23yq=24$, ſommes égales.

$q=1$

$u=y+f=4$

$y=1$

$x=\frac{u}{y}=\frac{4}{1}=4$. $x^2=16$

$r=y+q=2$

$f=y+r=3$

$x^2+17x+60=z^2$

$16+68+60=144$. $z=12$

$x+12=z$ $\quad$ $x+5=z$

$4+12=16$ $\quad$ $4+5=9$

AVERTISSEMENT.

DANS cette méthode, dès qu'on veut voir ſi une équation peut ſe réſoudre en entiers, il faut en chercher les racines, comme je les ai cherchées de l'équation $x^2+17x=84$.

J'ai voulu donner cet exemple de cette méthode, dont je n'euſſe pû me ſervir dans quelques exemples des Sections précédentes, & je ne m'en ſervirai plus dans les exemples ſuivans.

Elle change la prémière équation, de ſorte qu'il n'y a dans l'un des membres que la lettre x *qui eſt inconnue, & un abſolu ſeul dans l'autre membre de l'équation.*

Autrement.

Soit la même équation $x^2+17x+60=z^2$

	x	z	
1+17+60	+1	— 1	1
1+17+60	+1	— 2	4
1+17+60	+1	— 3	9
1+17+60	+1	— 4	16
1+17+60	+1	— 5	25
1+17+60	+1	— 6	36
1+17+60	+1	— 7	49
1+17+60	+1	— 8	64
1+17+60	—1	+ 9	81
4+24+60	—2	+17	289
9+51+60	—3	+25	625

Ce ſecond grade ne peut finir. Le côté de z, qui donne tous les quarrez de ſuite ſera toujours le plus fort, & la réſolution en nombres ne ſe peut trouver que dans les huit reſtes du prémier grade.

La raiſon du prémier reſte eſt $1:1::x:z$, donc $x=z$, donc $x^2=z^2$, donc $x^2=x^2+17x+60$ impoſſible. La raiſon du deuxiême reſte $1:2::x:z$, donc $2x=z$, donc $4x^2=z^2$, donc $4x^2=x^2+17x+60$, donc $3x^2=17x+60$ impoſſible au moins en entiers. Troiſiême reſte $1:3::x:z$, donc $3x=z$, donc $9x^2=z^2$, donc $9x^2=x^2+17x+60$, donc $8x^2=17x+60$. Je l'eſſaye.

Equation $8x^2=17x+60$ ſoit $x=\frac{u}{y}$

$$8\frac{u^2}{y^2}=17\frac{u}{y}=60$$

$$8u^2=17uy+60y^2$$

$u>y$ ſoit $y+f=u$

$$8y^2+16yf+8f^2=17y^2+17yf+60y^2$$

$$8f^2=69y^2+yf$$

$f>y$

Digitized by Google

$f > y$ soit $y+r=f$

$8y^2+16yr+8r^2=69y^2+y^2+yr$

$8r^2+15yr=62y^2$

$r > y$ soit $y+q=r$

$8y^2+16yq+8q^2+15y^2+15yq=62y^2$

$8q^2+31yq=39y^2$, préfix égaux.

$q=1$

$y=1$

$r=y+q=2$

$f=y+r=3$ | $x^2+17x+60=z^2$. $z=3x=12$

$u=y+f=4=\frac{u}{y}=x$ | $16+68+60=144$ quarré de 12.

Les racines 4 & 12 sont des nombres composez en raison 1 : 3.

AVERTISSEMENT.

SI l'on veut essayer les raisons des préfix des 7 autres restes de ce prémier grade, comme par exemple $1:4::x:z$, de sorte que $4x=z$, & que puis $\frac{u}{y}=x$, on ne trouvera plus que u soit à y en raison multiple, ni par conséquent que x soit un nombre entier.

AVERTISSEMENT.

CETTE deuxiême méthode fait de la haute puissance toute seule un membre de l'équation.

AUTRE EXEMPLE,

SOIT $x+5=Q$, & $x+21=Q$. Je multiplie l'un par l'autre, & j'ai $x^2+26x+105=z^2$: $x^2+26x+105=z^2$. Equation à résoudre, où l'absolu est fort.

	x	z	
1+26+105	+1	—1	1
1+26+105	+1	—2	4

Visiblement le côté de x sera toujours le plus fort, jusqu'à ce que je trouve un quarré égal ou plus fort que 132, qui est la somme des préfix du côté de x. Mais 132 n'est pas un nombre quarré, & le prémier quarré

plus fort que 132 eſt 144, dont la racine eſt 12. Je ferai donc 11 ſouſtractions au prémier grade ſans trouver d'égalité, & le deuxiême grade ſera ſans fin. C'eſt donc dans les 11 reſtes du prémier grade qu'eſt la réſolution en entiers. Mais dans aucun de ces reſtes la raiſon des préfix n'eſt celle de x à z. C'eſt pourquoi il ne me reſte d'autre voye à tenter, que celle de racourcir en tâtonnant le prémier grade, ce qui ſe fait en changeant les ſignes de l'un des onze prémiers reſtes. Si je change les ſignes du deuxiême reſte, je tomberai d'abord dans un grade ſans fin. Si je change ceux du troiſiême il en ſera de même. Le côté de x ſera toujours le plus fort; mais ſi je change ceux du quatriême, j'aurai 2, & 7 au cinquiême reſte.

$x^2 + 26x + 105 = z^2$

	x	z	
	+1	— 1	
	+1	— 2	
	+1	— 3	
	—1	+ 4	
4+ 52+105	+2	— 7	49
9+ 98+105	+3	—11	121
16+104+105	4	= 15	225
	x=4	z=15	

& je trouverai l'égalité au 9, & pour revenir aux équations données,

x + 5 = un quarré . x + 21 = un quarré

x + 5 = 9 4 + 21 = 25

& 9 × 25 = 225 quarré de 15 = z^2

AUTRE EXEMPLE,

Soit x + 12 = Q

x + 21 = Q

21x + 252

x^2 + 12x

$x^2 + 33x + 252 = z^2$

	x	z
1+33+252	1	—16

Digitized by Google

$1+33+252$	$+1$	-2	4	$z=4 . x=1 . 4x=z . 16x^2=z^2 . x^2+33x\ 252 = 16x^2$, donc $15x^2 = 33x+252$, où la valeur de x n'eſt pas un nombre entier.
$1+33+252$	$+1$	-3	9	$9x^2=z^2 . 8x^3=33x+252 . x$ ne peut être ni 3 ni 4, il ſeroit trop foible.
$1+33+252$	$+1$	-4	16	$z=4 . 16x^2=z^2 . 15x^2=33x$, & 252, x ne peut être un nombre entier.
$1+33+252$	x	5	25	$z=5 . x=1 . z=5x . z^2=25x^2 . 24x^2=33x+252.$

$$24x^2=33x+252$$

$$24\frac{u^2}{y^2}=33\frac{u}{y}+252$$

$$24u^2=33uy+252y^2$$

$u > y$ soit $y+t=u$

$24y^2+48yt+24t^2=33y^2+33yt+252y^2$

$24t^2+15yt=261y^2$

$t > y$ soit $y+f=t$

$24y^2+48yf+24f^2+15y^2+15yf=261y^2$

$24f^2+63yf=222y^2$

$f > y$ soit $y+r=f$

$24y^2+48yr+24r^2+63y^2+63yr=222y^2$

$24r^2+111yr=35y^2$. préfix égaux.

$y=1$

$r=1$

$f=y+r=2$

$t=y+f=3 . x=\frac{u}{y}=\frac{4}{1}=4,$

$u=y+r=4$

équations données $x+12=4+12=16$

$x+21=4+21=25$

16 & 25 ſont quarrez.

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE.

$$4x+1=Q$$
$$x^2-2x+1=Q$$

$$+4x+1$$
$$-8x^2-2x$$
$$4x^3+x^2$$

$$4x^3-7x^2+2x+1=z^2$$
$$z^2+7x^2=4x^3+2x+1.$$

Equation à réſoudre où les hautes puiſſances ſont de même part.

Equation $z^2+7x^2=4x^3+2x+1$

$z>x$ ſoit $x+y=z$

$x^2+2xy+y^2+7x^2=4z^3+2x+1$

$8x^2+2xy+y^2=4x^3+2x+1$

ſoit $x>y$ ſoit $y+u=x$

$8y^2+16yu+8u^2+2y^2+2yu+y^2=4y^3+12y^2u+12yu^2+4u^3$
$+2y+2u+1$

$y=1$

$u=1$

$x=y+1=2$. Equat. données $4x+1=Q$. $x^2=2x+1=Q$

$z=x+y=3$ $8+1=9\,.\,4-4+1=1$

$9\times1=9=z^2\,.\,z=3$

*J'ai pris cet exemple de la quatrième page de l'*Inventum novum, *qui eſt à la tête du Diophante donné par feu M. de Fermat avec les remarques de ſon pere. Or quelque nombre que ſoit* x, *il eſt évident que* x^2-2x+1 *ſera un quarré dont la racine ſera* $x-1$. *On aura donc autant de fois des racines de cette double équation que* $4x+1$ *ſera quarré, & cela ſera toutes les fois que* x *ſera le double d'un triangulaire : car alors* $4x+1$ *ſera huit fois un triangulaire plus* 1, *ce qui eſt toujours un nombre quarré.*

Et parceque x^2+2x+1 *eſt auſſi un quarré, ce quarré de* $4x+1$ *donnera de nouvelles racines autant de fois que* x *ſera double d'un triangulaire.*

J'ai voulu un exemple, où il y eût quelque terme négatif, comme ici $-2x$ *eſt un terme du ſecond quarré.*

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

Pour chercher une ſolution en fraction, j'ai l'équation

$4x^3+2x+1=7x^2+z^2$ ſoit $x=\frac{u}{y}$

$4\frac{u^3}{y^3}+2\frac{u}{y}+1=7\frac{u^2}{y^2}+z^2$

$4u^3+2uy^2+y^3=7u^2y+z^2y^2$,

z^2 eſt l'abſolu de y^2 qu'il faut chercher en tâtonnant: tout nombre entier eſt trop fort, même l'unité ; & l'épreuve en eſt aiſée, $\frac{1}{3}$ eſt trop fort, $\frac{1}{2}$ eſt la ſeule fraction qui puiſſe réuſſir, $z^2=\frac{1}{4}$.

$4u^3+2uy^2+y^3=7u^2y+\frac{1}{4}y^3$

$16u^3+8uy^2+4y^3=28u^2y+y^3$

$16u^3+8uy^2+3y^3=28u^2y$, Equation à réſoudre, où les hautes puiſſances ſont de même part.

$y>u$ ſoit $u+t=y$

$16u^3+8u^3+16u^2t+8ut^2+3u^3+9u^2t+9ut^2+3t^3=28u^3+28u^2t$

$u^3+3u^2t=3t^2+17ut^2$

$u>t$ ſoit $t+f=u$

$t^3+3t^2f+3tf^2+f^3+3t^3+6t^2f+3tf^2=3t^3+17t^3+17t^2f$

$f^3+6tf^2=16t^3+8t^2f$

$f>t$ ſoit $t+r=1$

$t^3+3t^2r+3tr^2+r^3+6t^3+12t^2r+6tr^2=16t^3+8t^3+8t^2f$

$r^3+7t^2r+9tr^2=17t^3$ préfix égaux.

$r=1$. $f=t+r=2$. $y=u+t=4$

$t=1$. $u=t+f=3$. $x=\frac{u}{y}=\frac{3}{4}$. $4x+1=8$

J'ai cherché d'abord par mégarde une réſolution en fractions à cette ſeule équation $2x^2-2x+1=z^2$, *dont la réſolution en entiers eſt* $x4$, & $z=25$, *& je veux bien la mettre ici, quoique ce ne ſoit pas une réſolution d'une double équation.*

$\frac{12}{4}+\frac{4}{4}=\frac{16}{4}$

$x^3+1-2x=0$

$-\frac{9}{16}+\frac{16}{16}-\frac{24}{16}=\frac{1}{16}$

$4\times\frac{1}{16}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

$z^2=\frac{1}{4}$

soit $2x^2+1-2x=z^2$, & soit $x=\frac{u}{y}$

$$2\frac{z^2}{y^2}+1=\frac{u}{y}=z^2$$

$$2u^2+y^2=2uy+z^2y^2$$

z^2 qui est l'absolu de y^2 ne peut être un nombre entier, & ce n'est qu'en tâtonnant que je trouve que $z=\frac{13}{7}$

$2x^2+1-2x=z^2$ soit $x=\frac{u}{y}$

$2u^2+1-2\frac{u}{y}=z^2$

$2u^2+y^2=2uy+z^2y^2$ soit $z=\frac{13}{7}$

& $z^2=\frac{169}{49}$

$2u^2+y^2=2uy+y^2z^2$

	u	y	
2 + 1	— 1	+ 1	$2+\frac{169}{49}>1$, donc
8 + 1	+ 1	— 1	
18 + 4	— 3 =	+ 2	$24\frac{169}{49}>3$, je mets
50 + 9	— 5	+ 3	+ devant 1 sous y.
98 + 16	+ 7	— 4	
288 + 49	12 =	7	$4+\frac{169}{49}<5$, donc

$4+\frac{169}{49}<9$, & je mets — devant 1, $12+4\times\frac{169}{49}=\frac{176}{49}>21$, & je mets + devant 2 ; $30+9\times\frac{169}{49}=\frac{1521}{49}\times 29$, & je mets + devant 3.

; $56+16\times\frac{169}{49}=\frac{1183}{49}<58$, & je mets — devant 4

; $168+49\times\frac{169}{49}=337$

$u=12.\ 7=y.\ \frac{u}{y}=\frac{12}{y}=x.\ x^2=\frac{144}{49}$

$2x=\frac{24}{y}=\frac{168}{49}.\ 2x^2=\frac{288}{49}.\ 1=\frac{49}{49}$

Digitized by Google

$2x^2 = 2x + 1 = z^2$

$\frac{288}{49} - \frac{168}{49} + \frac{49}{49} = \frac{337}{49} - \frac{168}{49} = \frac{169}{49} = z^2.$

EXEMPLE,

D'une triple Equation.

$$x + 2 = Q.$$
$$2x + 2 = Q$$
$$3x + 4 = Q.$$

Le produit $6x^3 + 26x^2 + 36x + 16 = z^2$.

Somme des préfix du côté de x, c'eſt 84.

Le prémier quarré plus fort eſt 100, dont la racine eſt 10.

Le prémier grade a 9 ſouſtractions ſans que l'égalité paroiſſe, & le deuxiême grade eſt ſans fin. Les préfix des reſtes de ces neuf ſouſtractions ne ſont en aucune raiſon, qui mene à l'égalité. Et il faut néceſſairement racourcir le prémier grade, & ce n'eſt qu'au neuviême reſte qu'il faut changer les ſignes; mais il faut encore les changer au reſte ſuivant, pour ne pas tomber dans un grade ſans fin, & puis opérer à l'ordinaire.

$6x^3 + 26x^2 + 36x + 16 = z^2$

	x	z	
84	+ 1	— 8	64
84	— 1	+ 9	81
48+104+72+16	+ 2	— 17	289
162+23+108+16	— 3	+ 26	676
750+650+180+16	— 5	+ 43	1849
2058+1274+252+16	7	= 60	3600.

$x = 7.$ $z = 60$

Equations données $x + 2 = Q$. $2x + 2 = Q$. $3x + 4 = Q$.

Valeurs $7 + 2 = 9$. $14 + 2 = 16$. $21 + 4 = 25$.

Les trois quarrez 9, 16, 25 multipliez enſemble produiſent 3600 quarré de $60 = z$.

AUTRE EXEMPLE

D'une triple Equation.

$2x + 2 =$ un quarré.
$x + 2 =$ un autre quarré.
$x + 18 =$ un troiſiême quarré.

Leur produit eſt $2x^3 + 42x^2 + 112x + 72$, que je ſuppoſe $= z^2$.

La ſomme des préfix du côté de x eſt 228, & le prémier quarré plus fort eſt 256, dont la racine eſt 16. Le prémier grade eſt donc de quinze ſouſtractions ſans que l'égalité paroiſſe, & le deuxiême grade eſt ſans fin. Et en racourciſſant le prémier grade au neuviême reſte, on parvient à l'égalité, mais non pas ſans ſortir de l'operation ordinaire, comme l'on va voir : car il n'y a que le reſte ſuivant, qui eſt le dixiême, $+2 - 17$, où les ſignes ſoient poſez ſuivant la regle ordinaire. Il faut les mettre contre cette regle, dans les reſtes onziême & douziême pour éviter deux fois un grade ſans fin, & le treiziême reſte eſt la réſolution de la triple équation.

$2x^3 + 42x^2 + 112x + 72 = z^2$

	x	z	
228	+ 1	— 8	64
228	— 1	+ 9	81
16 + 168 + 224 + 72	+ 2	— 17	289
54 + 378 + 336 + 72	— 3	+ 26	676
250 + 1500 + 160 + 72	— 5	+ 43	1849
686 + 2058 + 784 + 72	7	60	3600

$x = 7$; $z = 60$

Equations $2x + 2 = Q$. $x + 2 = Q$. $x + 18 = Q$.

Valeurs $14 + 2 = 16$. $7 + 2 = 9$. $7 + 18 = 25$.

Les trois racines ſont 4, 3, 5, dont le produit eſt $60 = z$, & le produit des trois quarrez 16, 9, 25, eſt 3600 quarré de 60.

AVERTISSEMENT.

LA Multiplication des équations propoſées en peut produire une ſi grande, qu'il ſeroit plus commode de

Digitized by Google

de chercher les réſolutions de châcune des propoſées à part, que celle de la produite, & d'ordinaire, au moins dans les réſolutions en nombres entiers, la valeur de l'inconnuë dans la plus grande des équations propoſées, eſt la meſme que la valeur de l'inconnuë dans les petites. Soient par exemple, les trois équations ſuivantes.

$x^1 + 1 =$ à un Q
$x^4 + x\,9 =$ à un Q
$x^5 + 6x + 5 =$ à un Q.

Les multiplications & la réſolution en ſeroient également ennuyeuſes, au lieu que la réſolution de la derniere eſt très-facile, & qu'elle ſuffit pour découvrir la valeur de l'inconnuë dans toutes les trois.

$x^5 + 6x + 5 = z^2$

	x	z	
1 + 6 + 5	+ 1	— 1	1
12	+ 1	— 2	4
12	+ 1	— 3	9
12	— 1	+ 4	16
32 + 12 + 5	2	= 7	49
	x = 2	z = 7	

Equations $x^1 + 1 = 9$. $x^4 + x - 9 = 9$. $x^5 + 6x + 5 = z^2$
Réſolutions $8 + 1 = 9$. $16 + 2 - 9 = 9$. $32 + 12 + 5 = 49$

AVERTISSEMENT.

ON appelle affirmatif un nombre affecté du ſigne +, & negatif, ou faux, un nombre affecté du ſigne —. Mais il arrive quelquefois qu'un nombre affirmatif eſt affecté du ſigne —, & qu'un nombre faux eſt affecté du ſigne +, parcequ'une lettre non affectée de ſigne, x, par exemple, peut eſtre priſe pour un nombre faux, ſi bien que x ſeul ſignifiera — 4, qui eſt un nombre négatif, ou faux. Or ſi cet x eſt multiplié par un nombre poſitif, comme + 2, le produit ſera + 2x, & vaudra — 8, parceque — 4 par + 2 fait — 8, & ainſi + 2x eſt un nombre faux, ou négatif, quoiqu'affecté du ſigne +. Si au contraire x qui vaut — 4, eſt multiplié par un nombre negatif, comme — 3, le produit, qui eſt — 3x,

vaudra +12, parceque —4 par —3, donne +12, & ainſi —3x eſt un nombre affirmatif, quoiqu'affecté du ſigne —.

Que ſi vous ſuppoſez que x ſoit +4, alors le multipliant, comme ci-deſſus par +2, le produit 2x vaudra +8. Et le multipliant, encore comme ci-deſſus par —3, le produit —3x = —12, parceque +4 multiplié par +2 = 8, & que +4 multiplié par —3 = —12. Lors donc que +2x eſt ſuppoſé nombre faux, ou négatif, —2x eſt nombre affirmatif; & lorſque —3x eſt ſuppoſé négatif, +3x eſt affirmatif. Ainſi en changeant les ſignes des nombres faux, on change les nombres faux, ou négatifs en nombres vrais, ou affirmatifs.

Lors donc que je veux trouver la racine fauſſe d'une équation, j'en change les ſignes pour rendre la racine vraye; parceque par ma méthode je n'opére que par nombres vrais, & ne trouve que des racines vrayes, qui deviennent fauſſes en changeant leur ſigne.

EXEMPLE,

Où la Racine eſt un nombre faux.

$$2x^2 - 4x + 1 = Q$$
$$-2x + 1 = Q$$

Il faut changer les ſignes des termes, dont l'expoſant eſt un nombre impair.

Multiplication de $2x^2 + 4x + 1$
par $+2x + 1$

$2x^2 + 4x + 1$
$4x^3 + 8x^2 + 2x$

produit $4x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = z^2$

	x	z	
2 1	+1	—1	1
2 1	+1	—2	4
2 1	+1	—3	9
2 1	+1	—4	16
+4 +10 +6 +1	—1	+5	25
32 +40 +12 +1	+2	—9	81
108 +90 +18 +1	+3	—14	196
256 +160 +24 +1	+4	—19	861

Digitized by Google

Ce grade ne peut finir. Mettre 2 ſous x ſeroit encore pis. On ne peut prendre la proportion en aucun des cinq premiers reſtes, qui ſont les deux premiers grades : à prendre z : x :: 5 : 1 x ſeroit > 3, & < 4 ; & à prendre z : x :: 4 : 1. x ſeroit une fraction moindre que l'unité ; & à prendre la proportion dans les reſtes antérieurs, x vaudroit encore moins. Pour trouver la valeur d'x en un nombre entier, il faut prolonger le premier grade, en changeant les ſignes du cinquiéme reſte, en mettant + 1 — 5, & puis proceder régulierement.

Equation $4x^3+10x^2+6x+1=z^2$

	x	z	
	+1	—4	
	+1	—5	
21	—1	+6	36
32+40+12+1	—2	+11	121
108+90+18+1	—3	+16	256
256+160+36+1	4 =	21	441

x = 4. z = 21

Equations. $2x^2+4x+1$ . . . . $2x+1$

Réſolutions. $32+16+1=49$ $8+1=9$

Et parceque dans les équations données il y a —4 x, & —2 x, la racine eſt —4. Ainſi x = —4, & par conſéquent —4 x, eſt —4 multiplié par —4, ce qui eſt 16.

Equations données. $2x^2-4x+1=Q$. $-2x+1=Q$

$32+16+1=49$. $+8+1=9$

AUTRE EXEMPLE,

Où la Racine eſt fauſſe.

$$8x^2+16x+4=Q$$

$$2x^2+4x+4=Q$$

Il faut changer les ſignes, où l'expoſant eſt un nombre impair.

$$8x^2 - 16x + 4$$
$$2x^2 - 4x + 4$$

$$32x^3 - 64x + 16$$
$$-32x^3 + 64x^2 - 16x$$

$$16x^4 - 32x^3 + 2x^2$$

$$16x^4 - 64x^3 + 104x^2 - 80x + 16 = z^2$$
$$16x^4 + 104x^2 + 16 = z^2 + 64x^3 + 80x$$

	x	z	
$16 + 104 + 16$	-1	$+1$	$1 + 64 + 80$
$256 + 416 + 16$	$+2$	-1	$1 + 512 + 160$
$1296 + 936 + 16$	$+3$	-2	$4 + 1728 + 240$

Ce grade ne peut finir. Et la proportion dans le premier reſte ne menant pas à l'égalité, je mets 2 ſous z.

$$16x^4 + 104x^2 + 16 = z^2 + 64x^3 + 80x$$

	x	z	
	$+1$	-1	
$16 + 104 + 16$	-1	$+2$	$4 + 64 + 80$
$256 + 416 + 16$	$+2$	-3	$9 + 512 + 160$
$1296 + 936 + 16$	$+3$	-5	$25 + 1728 + 24$

Ce grade ne finit pas. La proportion dans le premier reſte ne meine pas à l'égalité. Je la prends au ſecond reſte.

$$z : x :: 2 : 1. \; 2x = z. \; 4x^2 = z^2$$

$16x^4 + 104x^2 + 16 = 64x^3 + 80x$. Soit $x = \frac{u}{y}$

$$16\frac{u^4}{y^4} + 100\frac{u^2}{y^2} + 16 = 64\frac{u^3}{y^3} + 80\frac{u}{y}$$

$$16u^4 + 100\frac{u^2}{y^2} + 16y^4 = 64u^3y + 80uy^3$$

	u	y	
$16 + 100 + 16$	-1	$+1$	$64 + 80$
$256 + 400 + 16$	2	$=1$	$512 + 160 = 672$

$u = 2. \; y = 1. \; \frac{u}{y} = \frac{2}{1} = 2 = x. \; 2^2 = 4. \; z = 2x = 4.$

La racine fauſſe eſt $-2 = x$. Et $16x$ eſt $-x$ mul-

Digitized by Google

tiplié par 16. le produit eſt —16, & 4x eſt —2 multiplié par 4, ce qui fait —8.

Equations données $8x^2+16x+4=Q.\ 2x^2+4x+4=Q.\ 32-32+4=4.\ 8-8+4=4$

Ces deux quarrez 4 & 4 multipliés enſemble donnent 16 quarré de —4= à deux fois —x= à z.

AUTRE EXEMPLE,

Dont la Racine eſt fauſſe.

$$2x^2+2x+1=Q$$
$$2x^2+6x+1=Q$$

Il faut changer les ſignes aux termes, où l'expoſant eſt un nombre impair.

Multiplication de $2x^2-2x+1$

par $2x^2-6x+1$

$+2x^2-2x+1$

$-12x^3+12x^2-6x$

$+4x^4-4x^3+2x^2$

Produit $4x^4-166x^3+16x^2-8x+1$

Signes changés $4x^4-16x^3+16x^2-8x+1=z^2$

Donc $4x^4+16x^2+1=z^2+x^3+8x$

	x	z	
4+16+1	−1	+1	1+16+8
64+64+1	−2	+1	1+128+16
324+144+1	+3	−1	1+432+24
2500+400+1	+5	−2	1+2000+40

Ce grade ne peut finir, & on ne réuſſira pas à prendre la proportion dans les deux premiers reſtes, ni à continuer le premier grade, ni en le rompant. Il faut mettre 2 ſous z, & continuer ce premier grade, en mettant — devant 2, & + devant 3, & puis opérer régulierement juſqu'au ſeptiême reſte, où ſera l'égalité.

$4x^4+16x^2+1 = z^2+16x^1+1x$

	x	z	
4+16+1	+1	−1	2+16+8
4+16+1	+1	−2	4+16+8
4+16+1	+1	−3	9+16+8
4+16+1	−1	+4	16+16+8
64+64+1	−2	+7	49+128+16
324+144+1	−3	+11	121+432+24
1024+256+1	4	= 15	225+1024+32

x=4. z=15

La racine fauſſe eſt −4. & ainſi 2x, & −4 multiplié par 2, ce qui eſt −8, & 6x eſt −4 par 6, ce qui fait −24.

Equat. données. $2x^2+2x+1 = Q.$ $2x^2+6x+1 = Q.$

$32-8+1 = 25.$ $32-24+1 = 9$

Le produit de ces deux quarrez 25, & 9 = 225, dont la racine eſt 15 = z.

AUTRE EXEMPLE

D'une double Equation cubique.

x + 4 = un cube

x + 11 = un autre cube.

Le produit de x+4 par $x^2$11, eſt $x^3+4x^2+11x+44 = z^3$

La ſomme des préfix du côté d'x eſt 60.

	x	z	
60	+1	−1	1
60	+1	−2	8
60	+1	−3	27
60	−1	+4	64
8+16+22+44	−2	+7	343

Ce grade ne peut finir, & l'égalité ne paroît pas. Il faut la chercher dans les trois premiers reſtes, mais en mettant 2 ſous x, c'eſt à-dire en changeant les ſignes du premier reſte, le côte d'x ſeroit toujours le plus fort. En changeant les ſignes du troiſiême reſte on

Digitized by Google

rendroit le côté de z encore plus fort, & le deuxième grade ſeroit plus évidemment ſans fin. C'eſt donc du deuxième reſte qu'il faut changer les ſignes.

$$x^3+4x^2+11x+44=z^3$$

	x	z		
60	+1	−1	1	$z=x$ ne ſe peut
60	−1	+2	8	$z=2x$ ne meine pas à une réſolution en entiers
60	2	3		$z:x::3:2$. donc $2z=3x$

donc $8z^3=27x^3$. donc $z^3=27\frac{x^3}{8}$

donc $x^3+4x^2+11x+44=27\frac{x^3}{8}$

donc $8x^3+32x^2+88x+352=27x^3$

donc $32x^2+88x+352=19x^3$ ſoit $x=\frac{u}{y}$

donc $32\frac{u^2}{y^2}+88\frac{u}{y}+352=19\frac{u^3}{y^3}$

donc $32uy+88uy^2+352y^3=19u^3$

	y		u	
32+88+352	+1		−1	19
128+176+352	+1		2	152
288+264+352	−1		3	513
512+352+352	−1	=	4	1216

$y=1.\ u=4=x$

$x=\frac{u}{y}=\frac{4}{1}=4.\ x^2=16\ x+11=27.\ x+4=8.\ 3x=2z$
$=12.\ z=6.\ z^2=36.\ z^3=216=8\times27$

Equations données. $x+4=$ un cube. $x^2+11=$ un cube.

$4+4=8$ $16+11=27$

ARTICLE IV.

SECTION CINQUIEME,

84 *Lorſque dans l'équation il n'y a qu'une lettre, laquelle marque une quantité inconnuë, je ſuppoſe une fraction égale à l'inconnuë.*

EXEMPLE,

Où l'abſolu ſeul eſt l'un des membres de l'Equation.

SOIT l'équation $5y = 8$. Je mets $y = \frac{x}{z}$

donc $5\frac{x}{z} = 8$

donc $5x = 8z$

donc $x > z$ ſoit $z + a = x$

donc $5a + 5z = 8z$

$5a = 3z$

$z > a$ ſoit $a + b = z$

donc $5a = 3a + 3b$

$2a = 3b$

$a > b$ ſoit $b + c = a$

donc $2b + 2c = 3b$

$2c = b$

$b > c$ ſoit $c + d = b$

$c + d = 2c$

donc $c = d$, où les préfix ſont égaux de parr & d'autre

$c = 1$ $z = a + b = 5$

$d = 1$ $x = a + z = 8$

$b = c + d = 2$ $\frac{x}{z} = \frac{8}{5} = y.$ $5y = 8$

$a = b + c = 3$

C'eſt la diviſion de 8 par 5.

Digitized by Google

DE L'EXTRACTION 86

des racines des puiſſances numériques.

EXEMPLE,

Qu'il faille extraire en nombres entiers la racine quârrée de 8.

$y^2 = 8$ ſoit $y = \frac{x}{z}$

$\frac{x^4}{z^2} = 8$

$x^2 = 8z^2$

$x > z$ ſoit $z + a = x$

$z^2 + 2za + a^2 = 8z^2$

$a^2 + 2za = 7z^2$

$a > z$ ſoit $z + b = a$

$z^2 + 2zb + b^2 + z^2 + 2zb = 7z^2$

$b^2 + 4zb = 5z^2$

$z > b$

Or dès que z eſt le plus fort, il faut revenir au reſte précédent, qui eſt ici $a^2 + 2za = 7z^2$; & parceque les préfix du prémier membre ne valent que 3, il faut mettre $a^2 + 2za = 3z^2$, égalité dans laquelle $z = 1$, & $a = 1$, & par conſéquent $3z^2 = 3$, & $7z^2 = 7$, & de 7 ôtant 3 reſte 4, qui eſt l'excès de 8, ſur y^2 le plus grand quarré qui ſoit dans 8, lequel y^2 eſt donc 4. Et puis $x = z + a$, donc $x = z$, donc $\frac{x}{z} = \frac{2}{1} = 2 = y$, donc 2 eſt la racine de y^2, qui eſt 4, & 4 eſt le plus grand nombre entier quârré qui ſoit dans 8.

EXTRACTION

de la racine quârrée de 144.

$4x^2 = 144$ ſoit $x = \frac{y}{z}$

$4\frac{y^2}{z^2} = 144$

$4y^2 = 144z^2$

$y > z$ soit $z + a = y$

$4z^2 + 8za + 4a^2 = 144z^2$

$4a^2 + 8za = 140z^2$

$a > z$ soit $z + b = a$

$4z^2 + 8zb + 4b^2 + 8z^2 + 8zb = 140z^2$

$4b^2 + 16zb = 128z^2$

$b > z$ soit $z + c = b$

$4z^2 + 8zc + 4c^2 + 16z^2 + 16zc = 128z^2$

$4c^2 + 24zc = 108zc$

$c > z$ soit $z + d = c$

$4z^2 + 8zd + 4d^2 + 24z^2 + 24zd = 108z^2$

$4d^2 + 32zd = 8z^2$

$d > z$ soit $z + e = d$

$4z^2 + 8ze + 4e^2 + 32z^2 + 32ze = 80z^2$

$4e^2 + 40ze = 44z^2$, & les préfix de part & d'autre sont égaux.

$e = 1$	$b = z + c = 4$
$z = 1$	$a = z + b = 5$
$d = z + e = 2$	$y = z + a = 6$
$c = z + d = 3$	$x = \frac{y}{z} = \frac{6}{1} = 6$

$12 = 2x = \sqrt{4x^2} = \sqrt{144}$

POUR EXTRAIRE

la racine quarrée de 195.

$x^2 = 195$ soit $x = \frac{u}{y}$

$\frac{u^2}{y^2} = 195$

$u^2 = 195y^2$

$u > y$ soit $y + z = u$

$y^2 + 2yz + z^2 = 195y^2$

$z^2 + 2yz = 194y^2$

$z > y$ soit $y + t = z$

$y^2 + 2yt + t^2 + 2y^2 + 2yt = 194y^2$

$t^2 + 4yt = 191y^2$

$t > y$ soit $y + f = t$

$y^2 + 2yf + f^2 + 4y^2 + 4yf = 191y^2$

$f^2 + 6yf = 186y^2$

Digitized by Google

f > y soit y + r = f
$y^2 + 2yr + r^2 + 6y^2 + 6yr = 186y^2$
$r^2 + 8yr = 179y^2$
r > y soit y + q = r
$y^2 + 2yq + q^2 + 8y^2 + 8yq = 179y^2$
$q^2 + 10yq = 170y^2$
q > y soit y + p = q
$y^2 + 2yp + p^2 + 10y^2 + 10yp = 170y^2$
$p^2 + 12yp = 159y^2$
p > y soit y + o = p
$y^2 + 2yo + o^2 + 12y^2 + 12yo = 159y^2$
$o^2 + 14yo = 146y^2$
o > y soit y + n = o
$y^2 + 2yn + n^2 + 14y^2 + 14yn = 146y^2$
$n^2 + 16yn = 131y^2$
n > y soit y + m = n
$y^2 + 2ym + m^2 + 16y^2 + 16ym = 131y^2$
$m^2 + 18ym = 114y^2$
m > y soit y + l = m
$y^2 + 2yl + l^2 + 18y^2 + 18yl = 114y^2$
$l^2 + 20yl = 95y^2$
l > y soit y + k = l
$y^2 + 2yk + k^2 + 20y^2 + 20yk = 95y^2$
$k^2 + 22yk = 74y^2$
k > y soit y + i = k
$y^2 + 2yi + i^2 + 22y^2 + 22yi = 74y^2$
$i^2 + 24yi = 51y^2$
i > y soit y + h = i
$y^2 + 2yh + h^2 + 24y^2 + 24yh = 51y^2$
$h^2 + 26yh = 26y^2$
y > h. Il faut revenir au reſte antérieur qui eſt $i^2 + 24yi = 51y^2$, & ſuppôſer $i^2 + 24yi = 25y^2$, & de $51y^2$ il reſte $26y^2$, & $i^2 + 24yi = 25y^2$, où les préfix étoient égaux.

i = 1
y = 1
k = y + i = 2
l = y + k = 3
m = y + l = 4
n = y + m = 5
o = y + n = 6
p = y + o = 7

ized by Google

$q = y + p = 8$ $z = y + t = 12$

$r = y + q = 9$ $u = y + z = 13$

$f = y + r = 10$ $x = \frac{u}{y} = \frac{13}{1} = 13 = \sqrt{195y^2 - 26y^2} = \sqrt{169y^2}$

$t = y + f = 11$ Et puiſque $y^2 = 1.13 = \sqrt{169}$

. Et 169 quârré de 13 eſt le plus grand quârré qui ſoit dans 195.

EXTRACTION

de la racine cubique de 8.

$x^3 = 8$ ſoit $x = \frac{y}{z}$

$\frac{y^3}{z^3} = 8$

$y^3 = 8z^3$

$y > z$ ſoit $z + a = y$

$z^3 + 3z^2a + 3za^2 + a^3 = 8z^3$, & les préfix ſont égaux de part & d'autre,

$a = 1$

$z = 1$

$y = z + a = 2$

$x = \frac{y}{z} = \frac{2}{1} = 2 = \sqrt{8}$

EXTRACTION

de la racine cubique de 216.

$8x^3 = 216$

$8\frac{y^3}{z^3} = 216$

$8y^3 = 216z^3$

$y > z$ ſoit $z + a = y$

$8z^3 + 24z^2a + 24za^2 + 8a^3 = 216z^3$

$8z^3 + 24za^2 + 24a^2z = 208z^3$

$a > z$ ſoit $z + b = a$

Digitized by Google

$8z^3+24z^2b+24zb^2+8b^3+24z^2+48z^2b+24zb^2$
$+24z^2+24z^2b=208z^2$

$z=1$
$b=1$
$a=b=2$
$y=z+a=3.\ y^3=27$
$8y^3=8\times27=216.\ \sqrt[3]{8}=2.\ \sqrt[3]{27}=3$
$2\times3=6=\sqrt[3]{216}$

AVERTISSEMENT.

C'EST assez pour faire voir que l'on peut extraire les racines de toutes les puissances numériques, sans qu'il en faille suppôser aucunes, comme dans les méthodes ordinaires.

DE L'EXTRACTION

des racines des puissances littérales. L'inconnuë peut avoir ici un préfix plus grand que l'unité.

EXEMPLE,

Qu'il faille extraire la racine quarrée $4x^2+4x+1$.

SOIT $x+z$ la racine chèrchée. Son quârré sera $x^2+2xz+z^2=4x^2+4x+1$. Et retranchant x^2 par tout, il y aura $2xz+z^2=3x^2+4x+1$

	z		x	
	−1		+1	
4+4	2	=	1	3+4+1

$z=2$, $x=1$. $x+z=3$ est la racine

$4x^2+4x+1=9$ $\quad x^2+2xz+z^2=9$
$4+4+1=9$ $\quad 1+4+4=9$. 9 est le quârré.

Je continuë, & au deuxiême reste je mets + devant 2

	z		x	
	−1		+1	
	+2		−1	
12+9	3	=	2	12+8+1

$z=3$, $x=2$. $x+z=5$ eſt la racine

$4x^2+4x+1=25$ $\quad x^2+2xz+z^2=25$

$16+8+1=25$ $\quad 4+12+9=25$ eſt le quârré

EXEMPLE,

Qu'il faille extraire la racine quârrée de x^3+1.

Soit $x+y$ la racine chèrchée

$x^2+2xy+y^2=x^3+1$

y	x	
$+1$	-1	
$4+4+1$	-1	$=+2$ $\quad 27+1$
$9+12+4$	2×3	$8+1$

$y=1$. $\quad x=2$

$x^2+2xy+y^2=9$

$4+4+1=9$

$x^3+1=8+1=9$

Soit qu'on continuë le grade, ou qu'on en change, le côté d'x ſera toujours le plus fort, & il n'y aura plus de réſolution.

AVERTISSEMENT.

J'AI extrait ci-devant n° 80 pag. 74. & ſuiv. par une autre méthode la racine quârrée de cinq puiſſances du quatriême degré priſes de Mr Ozanam.

AUTRE EXEMPLE,

Où l'abſolu eſt ſeul. Dans Mr de Lagny, p. 485.

$x^3=98-45x$

donc $x^3+45x=98$ $\quad$ ſoit $x=\frac{z}{y}$

$\frac{z^3}{y^3}+45\frac{z}{y}=98$ multipliant par y^3

$z^3+45zy^2=98y^3$

$z>y$ $\quad$ ſoit $y+u=z$

$y^3+3y^2u+3yu^2+u^3+45y^3+45y^2u=98y^3$

$46y^3+48y^2u+3yu^2+u^3=98y^3$

Digitized by Google

$u^3 + 48y^2u + 3yu^2 = 52y^3$, où les préfix ſont égaux de part & d'autre.

$y = 1.\ z = y + u = 2.\ x = 98 - 45x$

$u = 1.\ x = \frac{z}{y} = 2.\ 8 = 98 - 90$

EXEMPLE,

Où l'abſolu eſt attaché au degré parodique.

Dans Mr de Lagny, p. 462.

Equation. $x^3 = 72x + 280$ ſoit $x = \frac{y}{z}$

donc $\frac{y^3}{z^3} = 72\frac{y}{z} + 280$

& multipliant par le dénominateur z, on a à réſoudre.

$$y^3 = 72yz^2 + 280z^3$$

donc $y > z$ ſoit $z + u = y$

$z^3 + 3z^2u + 3zu^2 + u^3 = 72z^3 + 72z^2u + 280z^3$

$u^3 + 3zu^2 = 351z^3 + 69z^2u$

$u > z.$ ſoit $z + f = u.\ u^2 = z^2 + 2zf + f^2$

$z^3 + 3z^2f + 3zf^2 + f^3 + 3z^2 + 6zf + 3zf^2 = 351z^3 + 69z^2 + 69z^2f$

$f^3 + 6zf^2 = 416z^3 + 60z^2f$

$f > z \ldots$ ſoit $z + r = f.\ f^2 = z^2 + 2zr + r^2$

$z^3 + 3z^2r + 3zr^2 + r^3 + 6z^2 + 12zr + 6zr^2 = 416z^3 + 60z^2 + 60z^2$

$r^3 + 9zr^2 = 469z^3 + 45z^2r$

$r > z.$ ſoit $z + q = r.\ r^2 = z^2 + 2zq + q^2$

$z^3 + 3z^2q + 3zq^2 + q^3 + 9z^2 + 18zq + 9zq^2 = 469z^3 + 45z^2 + 45zq$

$q^3 + 12zq^2 = 504z^3 = 24z^2q$

$q > z.$ ſoit $z + p = q.\ q^2 = z^2 + 2zp + p^2$

$z^3 + 3z^2p + 3zp^2 + p^3 + 12z^2 + 24zp + 12zp^2 = 504z^3 + 24z^2 + 24zp^2$

$p^3 + 3z^2p + 15zp^2 = 515z^3$

$p > z$. soit $z + n = p$. $p^3 = z^3 + 2zn + n^3$

$z^3 + 3z^2n + 3zn^2 + n^3 + 3z^3 + 3z^2n + 15z^2 + 30z^2n + 15zn^2 = 515z^3$

$n^3 + 36z^2n + 18zn^2 = 49z^3$

$n > z$. soit $z + m = n$. $n^3 = z^3 + 2zm + m^2$

$z^3 + 3z^2m + 3zm^2 + m^2 + 36z^3 + 36z^2m + 18z^3 + 36z^2m + 18zm^2 = 496z^3$

$m^3 + 75z^2m + 21zm^2 = 441z^3$

$m > z$. soit $z + l = m$. $m^3 = z^3 + 2zl + l^2$

$z^3 + 3z^2l + 3zl^2 + l^3 + 75z^3 + 75z^2l + 21z^3 + 42z^2l + 21zl^2 = 441z^3$

$l^3 + 120z^2l + 24zl^2 = 344z^3$

$l > z$. soit $z + k = l$. $l^3 = z^3 + 2zk + k^2$

$z^3 + 3z^2k + 3zk^2 + k^3 + 120z^3 + 120z^2k + 24z^3 + 48z^2k + 24zk^2 = 344z^3$

$k^3 + 171z^2k + 27zk^2 = 199z^3$, où les préfix ſont égaux.

$z = 1$, $q = z + p = 6$

$k + 1$. $r = z + q = 7$

$l = z + k = 2$

$m = z + l = 3$

$n = z + m = 4$

$p = z + n = 5$

$f = z + r = 8$. $x = \frac{y}{z} = \frac{10}{1}$ $x^3 = 1000$

$u = z + f = 9$. $x^3 = 72x + 280$

$y = z + u = 10$. $1000 = 720 + 280$.

AUTRE

Digitized by Google

AUTRE EXEMPLE,

De même page 464.

$x^3 = 60x + 400$ soit $x = \frac{y}{z}$

$\frac{y^3}{z^3} = 60\frac{y}{z} + 400$

$y^3 = 60yz^2 + 400z^3$

$y > z$ soit $z + a = y$

$z^3 + 3z^2a + 3za^2 + a^3 = 60z^3 + 60z^2a + 400z^3$

$a^3 + 3za^2 = 459z^3 + 57z^2a$

$a > z$ soit $z + b = a$

$z^3 + 3z^2b + 3zb^2 + b^3 + 3z^2 + 6zb + 3zb^2 = 459z^3 + 57z^2 + 57z^2b$

$b^3 + 6zb^2 = 512z^3 + 48z^2b$

$b > z$ soit $z + c = b$

$z^3 + 3z^2c + 3zc^2 + c^3 + 6z^2 + 12zc + 6zc^2 = 512z^3 + 48z^2 + 48z^2c$

$c^3 + 9zc^2 = 557z^3 + 33z^2c$

$c > z$ soit $z + d = c$

$z^3 + 3z^2d + 3zd^2 + d^3 + 9z^2 + 18zd + 9zd^2 = 557z^3 + 33z^2 + 33z^2d$

$d^3 + 12zd^2 = 590z^3 + 12z^2d$

$d > z$ soit $z + e = d$

$z^3 + 3z^2e + 3ze^2 + e^3 + 12z^2 + 24ze + 12ze^2 = 590z^3 + 12z^2 + 12z^2e$

$e^3 + 15ze^2 + 15z^2e = 589z^3$

$e > z$ soit $z + f = e$

$z^3 + 3z^2f + 3zf^2 + f^3 + 15z^2 + 30zf + 15zf^2 + 15z^2 + 15zf = 589z^3$

$f^3 + 18zf^2 + 48z^2f = 589z^3$

$f > z$ soit $z + g = f$

$z^3 + 3z^2g + 3zg^2 + g^3 + 18z^2 + 36zg + 18zg^2 + 48z^2 + 48zg = 589z^3$

$g^3 + 21zg^2 + 87z^2g = 589z^3$

$g > z$ soit $z + h = g$

gitized by Google

$z^4+3z^3h+3zh^2+h^4+21z^3+21zh^2+87z^2+87z^2h=589z^3$

$h^4+24zh^2+132z^2h=478z^3$

$h>z$ soit $z+i=h$

$z^4+3z^3i+3zi^2+i^4+24z^3+48z^2i+24zi^2$

$i^4+17zi^2+181z^2i=478z^3$

$i>z$ soit $z+k=i$

$z^4+3z^3k+3zk^2+k^4+27z^3+54z^2k+27zk^2+181z^3$
$+181z^2k=478z^3$

$k^4+30zk^2+238z^2k=269z^3$, les préfix ſont égaux.

$z=1$	$d=z+e=6$
$k=1$	$c=z+d=7$
$h=z+1=2$	$b=z+c=8$
$g=z+h=3$	$a=z+b=9$
$f=z+g=4$	$y=z+a=10$
$c=z+f=5$	$x=\frac{y}{z}=\frac{10}{1}=10$

AUTRE EXEMPLE,

Dans le cas irréductible, page 469.

87 $x^3=90x+100$ ſoit $x=\frac{z}{y}$

$\frac{z^3}{y^3}=90\frac{z}{y}+100$

$z^3=90zy^2+100y^3$

donc $z>y$ ſoit $y+u=z$

$y^3+3y^2u+3yu^2+u^3=90y^3+90y^2u+100y^3=190y^3$
$+90y^2u$

$u^3+3yu^2=189y^3+87y^2u$

$u>y$ ſoit $y+f=u$

$y^3+3y^2f+3yf^2+f^3+3y^2+6y^2f+3yf^2=189y^3+87y^2$
$+87y^2f$

$4y^3+9y^2f+6yf^2+f^3=276y^3+87y^2f$

$f^3+6yf^2=272y^3+78y^2f$

$f>y$ ſoit $y+s=f$

Digitized by Google

$y^4+3y^3r+3yr^2+r^3+6y^3+12y^2r+6yr^2=272y^3+78y^3+78y^2r$

$7y^3+15y^2r+9yr^2+r^3=350y^3+78y^2r$

$r^3+yr^2=343y^3+63y^2r$

$r>y$ soit $y+q=r$

$y^3+3y^2q+3yq^2+q^3+9y^3+18y^2q+9yq^2=343y^3+63y^3+63y^2q$

$10y^3+21y^2q+12yq^2+q^3=406y^3+63y^2q$

$q^3+12yq^2=396y^3+42y^2q$

$q>y$ soit $y+p=q$

$y^3+3y^2p+3yp^2+p^3+12y^3+24y^2p+12yp^2=396y^3+42y^3+42y^2p$

$13y^3+27y^2p+15yp^2+p^3=438y^3+48y^2p$

$p^3+15yp^2=425y^3+15y^2p$

$p>y$ soit $y+n=p$

$y^3+3y^2n+3yn^2+n^3+15y^3+30y^2n+15yn^2=425y^3+15y^2n+15y^3$

$16y^3+33y^2n+18yn^2+n^3=440y^3+15y^2n$

$n^3+18y^2n+18yn^2=424y^3$

$n>y$ soit $y+m=n$

$y^3+3y^2m+3ym^2+m^3+18y^3+18y^2m+18y^3+36y^2m+18ym^2=424y^3$

$37y^3+57y^2m+21ym^2+m^3=424y^3$

$m^3+57y^2m+21ym^2=387y^3$

$m>y$ soit $y+l=m$

$y^3+3y^2l+3yl^2+l^3+57y^3+57y^2l+21y^3+24y^2l+21yl^2=387y^3$

$79y^3+102y^2l+24yl^2+l^3=287y^3$

$l^3+102y^2l+24yl^2=308y^3$

$l>y$ soit $y+k=l$

$y^3+3y^2k+3yk^2+k^3+102y^3+102y^2k+24y^3+48y^2k+24yk^2=308y^3$

$127y^3+153y^2k+27yk^2+k^3=308y^3$

$k^3+153y^2k+27yk^2=181y^3$, où les préfix ſont égaux de part & d'autre.

$y=1$	$p=y+n=5$	
$k=1$	$q=y+p=6$	$z=y+u=10$
$l=y+k=2$	$r=y+q=7$	$x=\frac{z}{y}=10.x^2=100.x^3=1000$
$m=y+l=3$	$s=y+r=8$	$x^3=90x+100$
$n=y+m=4$	$u=y+s=9.$	$1000=900+100$

CINQUIEME EXEMPLE, pag. 482.

Ici l'abſolu eſt attaché à la haute puiſſance.

Equation $x^3=84x-160$

$x^3+160=84x$ ſoit $x=\frac{z}{y}$

$\frac{z^3}{y^3}+160=84\frac{z}{y}$

$z^3+160y^3=84zy^2$, où les deux puiſſances ſont de même part.

Il paroît que z eſt plus grande qu'y, en ce que ſi on ſouſtrayoit z d'y, & que l'on mît $z+u=y$, les préfix de z iroient ſi loin, qu'ils s'éloigneroient viſiblement de l'égalité. D'ailleurs $z \times y$, autrement $161y^3=84y^3$, ce qui ne ſe peut. Il faut donc mettre

$z > y$ ſoit $y+u=z$

$y^3+3y^2u+3yu^2+u^3+160y^3=84y^3+84y^2u$

$161y^3+3y^2u+3yu^2+u^3=84y^3+84y^2u$

$u^3+77y^3+3yu^2=81y^2u$ préfix égaux

$y=1.$	$z=y+u=2$	$x^3=84x=160$
$u=1.$	$x=\frac{z}{y}=2.x^3=8.$	$8=168-160=8$

Digitized by Google

Pour avoir une autre réſolution, la dernière équation eſt

$u^3+77y^3+3yu^2=81y^2u$ ſoit toujours $x=\frac{z}{y}$

je mets $u>y$ ſoit $y+f=u$

$y^3+3y^2f+3yf^2+f^3+77y^3+3y^3+6y^2f+3yf^2=81y^3+81y^2f$

$81y^3+9y^2f+6yf^2+f^3+81y^3+81y^2f$

$f^3+6yf^2=72y^2f$

$f>y$ ſoit $y+r=f$

$y^3+3y^2r+3yr^2+r^3+6y^3+12y^2r+6yr^2=72y^3+72y^2r$

$7y^3+15y^2r+9yr^2+r^3=72y^3+72y^2r$

$r^3+9yr^2=65y^3+57y^2r$

$r>y$ ſoit $y+q=r$

$y^3+3y^2q+3yq^2+q^3+9y^3+18y^2q+9yq^2=65y^3+57y^2+57y^2q$

$10y^3+21y^2q+12yq^2+q^3=122y^3+57y^2q$

$q^3+12yq^2=72y^3+36y^2q$

$q>y$ ſoit $y+p=q$

$y^3+3y^2p+3yp^2+p^3+12y^3+24y^2p+12yp^2=12y^3+36y^3+36y^2p$

$13y^3+27y^2p+15yp^2+p^3=148y^3+36y^2p$

$p^3+15yp^2=135y^3+9y^2p$

$p>y$ ſoit $y+n=p$

$y^3+3y^2n+3yn^2+n^3+15y^3+30y^2n+15yn^2=135y^3+9y^3+9y^2p$

$16y^3+33y^2n+18yn^2+n^3=144y^3+9y^2p$

$n^3+24y^2n+18n^2+n^3=128y^3$

$n>y$ ſoit $y+m=n$

$y^3+3y^2m+3ym^2+m^3+24y^3+24y^2m+18y^3+36y^2m+36ym^2=128y^3$

$43y+63y^2m+21ym^2+m^3+128y^3$, préfix égaux.

Digitized by Google

$y=1$	$r=y+q=5$	
$m=1$	$f=y+r=6$	
$n=y+m=2$	$u=y+f=7$	
$p=y+n=3$	$z=y+u=8$	$x^3=84x-160$
$q=y+p=4$	$x=\frac{z}{y}=\frac{8}{1}=8$	$512=672-160$

ARTICLE IV.

SECTION SIXIEME.

DES EQUATIONS entre grandeurs incommenſurables.

88 IL faut pour en extraire les racines opérer comme ſur les autres grandeurs.

PREMIER EXEMPLE.

LOrſque l'une des incommenſurables eſt accompagnée d'un abſolu,

Soit l'équation $\sqrt{2x^3}+4=\sqrt[3]{128x^2}$. ſoit $x=\frac{y}{z}$

$$\sqrt{2\frac{y^3}{z^3}}+4=\sqrt[3]{128\frac{y^2}{z^2}}$$

$$\sqrt{2y^3}+4z^3=\sqrt[3]{128y^2z}$$

y	z	
$\sqrt{2}+4$	-1	$+1$ $\sqrt[3]{128}$
$4+4$	2 $=$	1 $\sqrt[3]{512}=8$

$y=2.\ z=1.\ \frac{y}{z}=x=2.\quad \sqrt[3]{2x^3}=\sqrt{16}=4.$

$\sqrt{16}+4=8.$ donc $\sqrt{2x^3}=8.\ x^3=4.$

$128x^3=512.\quad \sqrt[3]{512}=8.$

Digitized by Google

DEUXIÉME EXEMPLE,

LOrſque l'inconnuë eſt dans tous les termes de l'équation, ſi quelqu'un des termes a un coefficiant, qui eſt une racine quarrée, ou cubique, ou autre, je compare l'inconnuë avec cette racine, & l'inconnuë ſera un nombre entier, ſi elle a raiſon de nombre à nombre avec cette racine.

Soit par exemple l'équation $x+\sqrt{64x}=\sqrt{2ax+x^2}$ comme 64 coefficiant d'x, qui eſt ſous le ſigne, eſt le quarré de 8, & le cube de 4, j'appelle a^2 ſon quarré, & a^3 ſon cube, ce qui fait deux équations. L'une eſt $x+\sqrt[3]{a^2x}=\sqrt{2ax+x^2}$, & l'autre eſt $x+\sqrt[5]{a^3x}=\sqrt{2ax+x^2}$, dans leſquelles l'inconnuë eſt comparée avec les deux racines du coefficiant 64.

Premiére Equation $x+\sqrt[3]{a^2x}=\sqrt{2ax+x^2}$

	a	x	
$1+\sqrt[3]{1}$	-1	$+1$	$1+1$
$1+\sqrt[3]{4}$	-2	$+1$	$2+1$
$1+\sqrt[3]{9}$	-3	$+1$	$\sqrt{6}+1$
$1+\sqrt[3]{16}$	-4	$+1$	$\sqrt{8}+1$
$1+\sqrt[3]{25}$	-5	$+1$	$\sqrt{10}+1$
$1+\sqrt[3]{36}$	-6	$+1$	$\sqrt{12}+1$
$1+\sqrt[3]{49}$	-7	$+1$	$\sqrt{14}+1$
$1+\sqrt[3]{64}$	$8=$	1	$\sqrt{16}+1$
$\sqrt[3]{64}=4$			$\sqrt{16}=4$

Deuxiême Equation $x + \sqrt[3]{a^3 x} = \sqrt{2ax + x^2}$

$$2 \qquad x$$

$1+1 \quad -1 \quad +1 \quad \sqrt{2}+1$

$1+2 \quad 2 = 1 \quad \sqrt{4x^2} = \sqrt{4} = 2+1$

Réſolution $a = 1 \quad x = 1$

$1+2 = +2+1$

Je ne donne point d'exemple des grandeurs imaginaires, que je ne crois pas devoir être diſtinguées des incommenſurables, & je crois devoir mettre ici ce que je penſe de leur nature, parceque je le crois démonſtratif.

DE LA NATURE
des grandeurs imaginaires.

160 J'Ai démontré ci-deſſus * ces huit proportions que je mets ici à côté.

On pourroit, ce ſemble, traiter d'imaginaires les ſept dernières, puiſqu'elles ont des termes faux, c'eſt-à-dire qui ne ſont pas dans la nature, mais qui ſont des manieres de compter, nées dans notre imagination. Ce n'eſt pourtant pas en ce ſens-là qu'on a employé le terme *d'imaginaire.*

$+a : +b :: +c : +d$
$+a : -b :: -c : +d$
$+a : +b :: -c : +d$
$+a : -b :: -c : -d$
$-a : -b :: -c : -d$
$-a : -b :: +c : -d$
$-a : -b :: +c : +d$
$-a : +b :: -c : +d$

Or ſi dans ces 8 proportions on ſuppoſe que a. b. c. d ſoient des nombres, & qu'a $= 1$, les 4 premieres ſeront les 4 multiplications connuës, & les 4 autres ſont l'origine des grandeurs imaginaires.

Dans les deux premières proportions on voit que le quarré $+4$ a deux racines $+2$, & -2.

Il

Digitized by Google

Il eſt ſurprenant, qu'un quarré affirmatif ait une racine négative ; & l'on a tenté de rendre cela ſenſible par des convenances, mais ſans démonſtration.

$+1 : +2 :: +2 : +4$
$+1 : -2 :: -2 : +4$
$+1 : +2 :: -2 : -4$
$+1 : -2 :: -2 : -4$
$-1 : -2 :: -2 : -4$
$-1 : +2 :: +2 : -4$
$-1 : -2 :: +2 : +4$
$-1 : +2 :: -2 : +4$

Dans les 5e. & 6e. on voit que le quarré -4 a les mêmes racines -2, & $+2$, & il ne doit pas paroître étrange que le quarré négatif -4 ait auſſi-bien que le poſitif $+4$ une racine affectée du ſigne contraire au ſien. On n'a pas dit pourtant que -4 ait deux racines, l'une poſitive, & l'autre négative, comme on l'a dit de $+4$. L'un a paru certain aprés une longue expérience toujours conſtante, l'autre n'a ſeulement pas été penſé. Cependant l'un & l'autre ſont également fondez ſur de véritables proportions, fondées néanmoins ſur ces principes, qu'on peut retrancher une quantité fauſſe, d'une fauſſe, & d'une vraie, & une vraie d'une fauſſe. Principes imaginaires dans le ſens que j'ai dit.

Et pour rendre ces proportions également ſenſibles, il eſt évident que -3 eſt autant de fois en -9 que $+3$ eſt de fois en $+9$. Mais le nombre des fois que $+3$ eſt en $+9$, ſe marque ainſi, $+27$. Donc $+27$ marque auſſi le nombre des fois que -3 eſt en -9. Et comme l'on dit que $+3$ par $+9$ fait 27, auſſi l'on dit que -3 par -9 fait 27.

De même -1 peut être autant de fois en $+3$, que $+3$ en -9, car ajoutez trois fois -1 à $+3$, la ſomme ſera zero. Ajoutez trois fois $+3$ à -9, ce ſera la même ſomme, c'eſt-à dire, zero. Maintenant ſouſtrayez trois fois $+1$ de $+3$, le reſte eſt zero, & ſouſtrayez trois fois $+3$ de $+9$, le reſte eſt encore zero. Ainſi la propoſition eſt également démontrée dans les deux manieres ; & comme la deuxiême maniere s'exprime ainſi, trois fois 3 font $+9$, auſſi la premiére doit s'exprimer trois fois 3 font -9.

De plus j'ai démontré dans mon grand Ouvrage que dans toutes ces proportions, & indépendamment l'une de l'autre, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

M. de Lagny, page 437, dit qu'il y a deux racines imaginaires de cette équation $xx = -b$, qui ſont l'une poſitive $x = +\sqrt{-b}$, & l'autre négative $x = -\sqrt{-b}$. Si xx, dit-il, $= -9$, on aura $x = +-3$, & $x = --3$, c'eſt-à-dire que les deux racines de -9 ſont $+3$ & -3, qui ſont auſſi les racines de $+9$. Il ſe propoſe, page 440, cette autre équation $xx = 8x - 25$, où il dit que $x = 4 +- 3$, & qu'encore $x = 4 -- 3$ racines mixtes imaginaires, où ſont les deux racines de -9, ſçavoir -3, & $+3$. Et dans l'équation $xx = -8x - 25$, il trouve les racines $-4 +- 3$, & $-4 -- 3$, qui ſont encore mixtes, & où ſont les racines de -9, ſçavoir -3, & $+3$. La premiere opération eſt ainſi $xx = 8x - 25$, je prends la moitié du coëfficiant 8, qui eſt 4, je le quârre, c'eſt 16, & $16 - 25 = -9$, les racines de -9 ſont $+3$, & -3. La ſeconde opération $xx = -8x - 25$, je prends -4, je le quârre, c'eſt 16, & $16 - 25 = -9$, dont les racines ſont encore $+3$, & -3.

88 Les quârrez, dont les racines ſont ſourdes, en ont auſſi une affirmative, & une négative. Les proportions ſont $+1 : \sqrt{3} :: \sqrt{3} : +3$, où le quârré 3 a une racine ſourde poſitive, & $+1 : -\sqrt{3} :: -\sqrt{3} : +3$, où ce même quârré 3 a une racine négative.

Le R. P. Reyneau remarque en plus d'un endroit de ſon Analyſe démontrée, que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair dans les équations. Et c'eſt ce qu'on vient de voir dans les deux ci-deſſus de M. de Lagny.

L'effet de ces multiplications inconnuës n'a pas laiſſé d'être reconnu véritable : car par exemple quand on

Digitized by Google

dit que $+\sqrt{-3}$, par $+\sqrt{-3}$ produit -3, on n'a pû ſuppoſer d'autre multiplication que celle-ci $-1 : +\sqrt{-3} :: +\sqrt{-3} : -3$. Car celle-ci $+1 : +\sqrt{-3} :: +\sqrt{-3} : -3$ n'eſt pas une proportion, ni par conſéquent une multiplication; les deux premiéres quantités affirmatives $+1 : +\sqrt{-1}$ ne peuvent être en même raiſon que les deux derniéres $+\sqrt{-3} : -3$, dont l'une eſt affirmative, & l'autre négative.

Voyons encore ces huit autres proportions, ou multiplications plus élevées d'un degré. On voit dans la premiére que le quârré $+4$ multiplié pâr ſa racine $+2$, produit le cube $+8$. Et dans la deuxiéme on voit que le quârré -4, multiplié par ſa racine -2, produit le même cube $+8$. Donc -2 eſt la racine négative du quârré négatif -4, & il eſt poſſible que le quârré négatif -4 ait une racine négative -2, comme on l'a vû dans la cinquiéme des huit premiéres multiplications.

$+1 : +2 :: +4 : +8$
$+1 : -2 :: -4 : +8$
$+1 : +2 :: -4 : -8$
$+1 : -2 :: +4 : -8$
$-1 : -2 :: -4 : -8$
$-1 : +2 :: +4 : -8$
$-1 : -2 :: +4 : +8$
$-1 : +2 :: -4 : +8$

On voit encore ici que le cube $+8$ eſt produit dans la ſeptiéme proportion par le quârré $+4$ multiplié par ſa racine -2, & dans la huitiéme que le même cube $+8$ eſt produit par le quârré -4 multiplié par ſa racine $+2$.

On voit que le cube négatif -8 eſt produit deux fois par le quârré -4 multiplié par ſes deux racines $+2$, -2, & que le même cube -8 eſt encore produit deux autres fois par le quârré affirmatif $+4$ multiplié par ſes deux racines -2, & $+2$. Donc la racine affirmaive $+2$ peut produire deux fois le cube -8 en multipliant ſes deux quârrés -4, & $+4$

AVERTISSEMENT.

ON voit dans les multiplications imaginaires, c'eſt-à-dire dans celles, où — 1° eſt le premier terme, que + par + produit —, & que + par —, ou, ce qui eſt tout un, — par + prodnit +, ce qui eſt le contraire de ce qui arrive dans les multiplications ordinaires.

I. COROLLAIRE.

DE là ſuit que toutes les puiſſances de quelque degré qu'elles ſoient, ont deux premiéres racines, qui ne ſont differentes l'une de l'autre que par leurs ſignes, c'eſt-à-dire, en ce que l'une eſt poſitive & l'autre négative.

II. COROLLAIRE.

ET il ſuit auſſi qu'une même racine peut produire deux puiſſances, qui ne different l'une de l'autre que par leurs ſignes.

AVERTISSEMENT.

SUr cette connoiſſance des grandeurs imaginaires, dont je ne veux pas changer le nom, j'ai tenté de donner la valeur de cette formule $\sqrt[3]{50+\sqrt{-24500}}+\sqrt[3]{50-\sqrt{-24500}}$, qui eſt 10, & que M. de Lagny dit, page 469, être la forme irrationnelle & imaginaire de la racine de cette équation $x^3 = 90x + 100$, qui eſt dans le cas irréductible. Pour le faire, je cherche la racine quârrée de 24500, & je trouve qu'elle eſt irrationnelle, & qu'elle tombe entre 166, & 167; je prends 166 pour la véritable racine, & je puis l'affecter de +, & de —, & je citerai la cinquiéme multi-

Digitized by Google

plication, qui eſt la premiére des imaginaires. 1°. Je dis $-166=\sqrt{24500}$, mais foible de quelque choſe, à 50 j'ajoute -166, la ſomme eſt -116. De 50 je retranche -166, & le reſte eſt 216, & trop fort; parceque retranchant -166, qui eſt foible, le reſte en doit être plus fort; $\sqrt[3]{-116}=+4$* $\sqrt[3]{216}=+6$, & $6+4=10$ racine cherchée de l'équation $x^3=90x+100$. 2°. Je prends $+166$, & je dis à 50 j'ajoute $+166$, la ſomme eſt 216. De 50 j'ôte $+166$, le reſte eſt -116.

$\sqrt[3]{216}=+6$, & $\sqrt[3]{-116}=+4$* & $6+4=10$.

J'ai donné quelquefois pour puiſſances numériques exactes, les plus grandes, qui ſont compriſes dans les nombres que j'ai donnés pour elles: mais dans ces opérations, où il entre des nombres ſourds, le ſuccès doit ſervir de démonſtration.

Je puis de même donner la valeur de ces deux incommenſurables, que M. de Lagny, page 499, dit être les racines de cette équation $x^3-72x-280=0$, ſçavoir $x=-5+\sqrt{-3}$ $x=-5-\sqrt{-3}$.

-3 eſt le quarré de $\sqrt{-3}$, racine qui tombe entre 1 & 2. Je puis prendre $+1$, & -1, pour $\sqrt{-3}$: je prends -1: donc $-5+\sqrt{3}=5+1=6$, & $-5-\sqrt{3}=-4$, & -6 & -4 ſont -10, qui peut être la racine de x^3. Je prends $+1$ pour $\sqrt{-3}$, & $-5+1=-4$, & $-5-1=-6$, & encore une fois -4, & -6 ſont -10.

Je laiſſe à faire un plus grand examen de ces grandeurs imaginaires, à qui voudra s'en donner la peine; mais je crois qu'on ne voudra plus les traiter d'impoſſibles, mais les regarder comme une deuxiême eſpece de grandeurs incommenſurables.

ARTICLE IV.

SECTION SEPTIEME,

DES EQUATIONS,

Qui ont autant de racines que de dimenſions.

MOnſieur Deſcartes au commencement du troiſiême livre de ſa Géométrie, conſtruit, de ces quatre équations multipliées enſemble, $x-1=0$, $x-3=0$, $x-4=0$, $x-5=0$, cette autre équation $x^4-4x^3-19xx+106x-120=0$, & il connoît qu'elle a une racine fauſſe, en ce qu'elle a deux ſignes pareils de ſuite $-4x^3-19xx$. J'extrais par ma méthode les racines de cette deuxiême équation, & elle ne me donne que les trois vraies 2, 3, 4 en cette maniére.

$x^4-4x^3-19xx-106x-120$

$x^4+106x=4x^3+19x^2+120$ ſoit $x=\frac{y}{z}$

$\frac{y^4}{z^4}+106\frac{y}{z}=4\frac{y^3}{z^3}+19\frac{y^2}{z^2}+120$

$y^4+106yz^3=4y^3z+19y^2z^2+120z^4$

y		z	
	-1	$+1$	
$16+112$	-2	$+1$	$32+76+120$
$81+318$	-3	$+1$	$108+171+120$
$256+424$	-4	$+1$	$256+304+120$
$625+530$	-5	$+1$	$500+475+120$

Puiſque l'expoſant de la puiſſance eſt 4, il me man-

Digitized by Google

que une quatriême racine qui eſt fauſſe ; & pour la trouver, je rends faux tous les termes de mon équation, en changeant les ſignes des termes y, dont l'expoſant eſt un nombre impair, en cette maniére.

$$y^4 - 106yz^3 = -4y^3z + 19y^2z^2 + 120z^4.$$

Et comme je n'opére qu'en nombres affirmatifs, je tranſpoſe les termes négatifs de cette équation en cette maniere $y^4 + 4y^3z = 19y^2z^2 + 106yz^3 + 120z^4$, dont je cherche la racine, qui reviendra vraie, & que je rendrai fauſſe en changeant ſon ſigne.

$$y^4 + 4y^3z = 19y^2z^2 + 106yz^3 + 120z^4$$

y		z	
	−1	+1	
16+32	−2	+1	96+106+120
81+108	−3	+1	171+318+120
256+256	−4	+1	304+424+120
625+500	−5 =	+1	475+530+120
1296+864	6 ×	1	684+636+120

$y = 5.\ z = 1.\ x = \frac{y}{z} = 5.\ -x = -5$

-5 eſt la racine cherchée.

AVERTISSEMENT.

ON peut s'appercevoir d'une autre ſorte, des racines fauſſes dans ces équations.

Ainſi dans l'exemple précédent, puiſque l'équation $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$, ne me donne dans le détail que trois racines, 2, 3, 4, & que l'expoſant 4 de la haute puiſſance a quatre unités, je puis ſoupçonner que cette équation a une racine fauſſe ; & pour le vérifier je multiplie enſemble les trois binomes compoſés de l'inconnuë x, & des trois racines vraies, le produit fera l'équation $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$, & non $x^4 - 4x^3$

$-19xx+106x=120$. Je ſçai donc par-là que la premiére équation a été multipliée par x, & par une racine fauſſe, c'eſt-à dire affectée du ſigne +. Or x multipliant la premiére équation, n'en change ni les ſignes, ni les préfix, & donne $x^4-9x^3+26x^2-14x=0$, ce qui étant retranché de la deuxiême équation, il reſte $+5x^3-45x^2+130x-120$, que je ſçai être le produit de la premiére équation multipliée par la racine fauſſe. Et parceque la même racine étant vraie, c'eſt-à dire affectée du ſigne auroit produit la même ſomme ſous ſignes contraires, c'eſt à-dire $-5x^3+45x^2-130x+120$, j'ajouterai ceci à la premiére équation, & j'en ferai une qui aura les quatre racines, mais toutes vraies, ſçavoir $x^4-14x^3+71x^2-154x+120$. J'en extrairai les racines, & la quatriême vraie affectée du ſigne + ſera la fauſſe; & pour en extraire les racines, je la transforme ainſi.

$$x^4+71x^2+120=14x^3+154x \quad \text{ſoit } x=\frac{z}{y}$$

$$\text{donc } \frac{z^4}{y^4}+71\frac{z^2}{y^2}+120=14\frac{z^3}{y^3}+154\frac{z}{y}$$

$$\text{donc } z^4+71z^2y^2+120y^4=14z^3y+154zy$$

Comme les deux hautes puiſſances ſont en un même membre de l'équation, quoique ſuivant la régle * je dûſſe mettre + devant l'unité ſous y, j'y mets —, parcequ'autrement le premier grade ne pourroit finir.

Equation $z^4+71z^2y^2+120y^4=14z^3y+154zy^3$

	z	y	
$1+71+120$	-1	$+1$	$14+154$
$16+284+120$	-2	$=+1$	$112+308$
$81+339+120$	-3	$=+1$	$378+462$
$256+1136+120$	-4	$=+1$	$896+616$
$625+1775+120$	-5	$=1$	$1150+770$
$1296+2656+120$	$+6$	$\times 1$	$3024+924$

Et comme le côté de z eſt plus fort que celui d'y indépen-

Digitized by Google

indépendamment de l'abſolu 120, il ne faut plus eſperer de réſolution, ſoit qu'on continuë le grade ou qu'on en change.

AVERTISSEMENT.

LA différence qu'il y a entre les équations produites par la multiplication de pluſieurs équations que j'ai réſoluës, article 4. ſection 6, & les équations, qui ont autant de racines que de dimenſions, c'eſt que dans celles-ci la même lettre inconnuë a différentes valeurs dans les différentes équations, qui les produiſent, & que dans les autres la même lettre inconnuë n'a qu'une même valeur en chacune des équations qui les produiſent, ce qui vient évidemment des manières différentes, dont ces prémières, & ces dèrnières équations ſont bâties.

Dans l'équation ſuivante, la racine n'a auſſi qu'une valeur.

EQUATION,

Où ni la haute puiſſance, ni le degré parodique ne ſont ſeuls.

$x^3 + x = 4x^2 + 4$ ſoit $x = \frac{z}{y}$

$\frac{z^3}{y^3} + \frac{z}{y} = 4\frac{z^2}{y^2}y + 4y^3$

$z^3 + zy^2 = 4z^2y + 4y^3$

$z > y$ ſoit $y + u = z$

$y^3 + 3y^2u + 3yu^2 + u^3 + y^3 + y^2u = 4y^3 + 8y^2u + 4yu^2 + 4y$

$u^3 = 6y^3 + 4y^2u + yu^2$

$u > y$ ſoit $y + f = u$

$y^3 + 3y^2f + 3yf^2 + f^3 = 6y^3 + 4y^3 + 4y^2f + y^3 + 2y^2f + yf^2$

$f^3 + 2yf^2 = 10y^3 + 3y^2f$

$f > y$ ſoit $y + s = f$

tized by Google

$y^3+3y^2r+3yr^2+r^3+2y^3+4y^2r+2yr^2=10y^3+3y^3+3y^2r$

$r^3+4y^2r+5yr^2=10y$

$y=1$

$r=1$

$f=y+r=2$

$u=y+f=3$

$x=y+u=4$

$$x=\frac{z}{y}=\frac{4}{1}=4.x^3=16.4x^3=64.4x^3+4=68x^3+x=68$$

$x=64$

J'ai pris cette équation du Commentaire de Bachet sur la dix-neuviême queſtion du livre ſixiême de Diophante, où Bachet dit que de ſon temps on n'avoit pas encore trouvé de régle générale pour réſoudre de ſemblables équations.

AVERTISSEMENT.

DAns les équations, qui ont autant de racines que l'expoſant de la haute puiſſance a d'unités, la haute puiſſance n'a que l'unité pour coëfficiant; & quand outre cela leur deuxiême terme eſt évanoui, on les appelle équations compoſées, parcequ'elles peuvent être produites par les équations d'un moindre degré multipliées entre elles. Ma méthode donne toutes les racines en nombres entiers qu'ont ces équations, & j'en ai donné pluſieurs exemples dans la ſection précédente. Mais il y a ſur cela deux obſervations à faire. La premiére eſt, que lorſqu'une équation a pluſieurs racines égales en nombres entiers, ma méthode n'en donne qu'une en une opération, & qu'il faut faire autant d'opérations qu'il y a de racines égales dans l'équation. La ſeconde obſervation à faire, eſt que les équations compoſées n'ont pas toujours autant de racines en nombres entiers, que l'expoſant de leur haute puiſſance a d'unités, & on leur en trouve, ou en nombres rompus, ou d'incommenſurables, ou d'imaginaires.

Digitized by Google

DES RACINES EGALES *en nombres entiers.*

PREMIER CAS.

SI, par exemple, de trois binomes ſemblables, comme $x-2=0$. $x-2=0$. $x-2=0$, on produit une équation, qui ſera $x^3-6x^2+12x-8=0$, l'on voit d'abord que n'ayant pas un même ſigne deux fois de ſuite, elle n'a pas de racine fauſſe: mais quand on en extraira les racines, il n'en paroîtra qu'une, qui ſera 2.

$x^3+12x=6x^2+8$ ſoit $x=\frac{y}{z}$

$$\frac{y^3}{z^3}+12x\frac{y}{z}=6\frac{y^2}{z^2}+8$$

$$y^3+12yz^2=6y^2z+8z^3$$

y	z	
$1+12$	-1	$+1$ $\quad 6+8$
$8+24$	-2	$=+1$ $\quad 24+8$
$9+36$	$3\times$	1 $\quad 54+8$

Pour avoir une deuxiême racine, je diviſe l'équation $x^3-6x^2+12x-8=0$ par cette équation $x-2=0$, où x vaut la racine connuë 2.

$$x^3-6x^2+12x-8 \;(\; xx-4x+4$$
$$x-2$$
$$\overline{3^3-2x^2}$$
$$\overline{-4x^2+12x-8}$$
$$x-2$$
$$\overline{-4x^2+8x}$$
$$\overline{4x-8}$$
$$x-2$$
$$\overline{4x+8}$$
$$\overline{0\quad 0}$$

J'ai pour quotient l'équation $x^2-4x+4=0$, dont

itized by Google

j'extrais les racines, & il ne me revient que la racine 2, & c'eſt la deuxiême racine = à la première. Je diviſe encore par la nouvelle équation $x-2=0$ pareille à la premiere, cette deuxiême équation $x^2-4x+4=0$, & j'ai pour quotient $x-2=0$, qui eſt la troiſiême racine 2.

DEUXIEME CAS.

QUelquefois il y a dans l'équation des racines égales, & d'inégales, & il n'en paroît qu'une des égales.

DEUXIEME EXEMPLE,

SOit l'équation $x^3-10x^2+33x-36=0$, où il n'y a pas même ſigne deux fois de ſuite, & ainſi il n'y a pas de racine fauſſe. J'extrais les racines.

Equation $x^2+33x=10x^1+36$ ſoit $x=\frac{y}{z}$

$$\frac{y^3}{z^3}+\frac{\overline{33y}}{z}=10\frac{y^2}{z^2}=36$$

$$y^3+33yz^2=10y^2z+36z^3$$

	y	z	
1+33	−1	+1	10+36
8+66	−2	+1	40+36
27+99	3 =	1	90+36
64+132	4 =	1	160+36
125+165	5 ×	1	250+36

Il ne paroît que deux racines, qui ſont 3, & 4, & l'expoſant de la haute puiſſance étant 3, il manque une racine; & pour voir ſi elle eſt égale à l'une des premières, je diviſe l'équation propoſée par $x-3=0$, ou par $x-4=0$. Et je trouve toujours le même

quotient $x-3=0$, qui fait voir que la racine cachée eſt 3.

$x^3-10x^2+33x-36$ (x^2-6x+9

$x-4$

x^3-4x^2

$-6x^2+33x$

$x-4$

$-6x+24x$

$9x-36$

$9x-36$

0 0

$x^4-10x^2+33x-36$ ($x^2-7x+12$

x^2-3

x^3-3x^2

$-7x^2+33x$

$x-3$

$-7x^2+21x$

$+12x-36$

$12x-36$

0 0

$x^2+9=6x\frac{y}{z}$ soit $x=\frac{y}{z}$ $x^2+12=7x.$ $x=\frac{y}{z}$

$\frac{y^2}{z^2}+9z^2=6\frac{y}{z}$ $\frac{y^2}{z^2}+12=7\frac{y}{z}$

$y^2+9z^2=6yz$ $y^2+12z^2=7yz$

y	z	y	z
−1	+1	−1	+1

4+9	−2	+1	12	4+12	−2	+1	14
9+9	3	= 1	18	9+12	3	= 1	21

Dans ces deux extractions des racines, les deux hautes puiſſances y^2, & z^2 ſont dans un même membre de l'équation ; & pour éviter de tomber dans un degré ſans fin, il a fallu mettre le ſigne + du côté le plus foible dans les deux premières ſouſtractions de chacune de ces deux opérations.

zed by Google

ARTICLE IV.

SECTION HUITIEME.

DES RACINES INCOMMENSURABLES.

ELLES ſont ou pures, ou ſimples, comme $\sqrt{+n}$, ou $\sqrt{-n}$, ou mixtes, c'eſt-à-dire compoſées d'un abſolu, & d'un incommenſurable. Ainſi $+$, ou $-m$, $+$ ou $-\sqrt{+n}$, ou $\sqrt{-n}$. Où néanmoins le ſigne radical peut être de tous les degrés $\sqrt[1]{}$ ou $\sqrt{}$ ſimplement. $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$. &c.

PREMIER EXEMPLE.

SOit l'équation $x^3-72x-280=0$. Ma méthode m'en a donné la racine 10 * ſeulement, & il n'y a point de racine négative, ni aucune autre racine égale à la première 10. Mais en diviſant cette équation par le binome $x-10$, j'ai eu pour quotient l'équation $x^2+10x+28=0$, dont il faut extraire les racines; & après avoir tenté inutilement toutes les autres voyes, pour en avoir de rationnelles, je ſuppoſe $x=-m+\sqrt{-n}$. Je quarre cette racine incommenſurable.

* 88

$$
\begin{array}{rl}
x= & -m+\sqrt{-n} \\
 & -m+\sqrt{-n} \\
 & -m\sqrt{-n}-n \\
 & +m^2-m\sqrt{-n} \\
x^2= & +m^2-2m\sqrt{-n}-n \\
+10x= & -10m+10\sqrt{-n} \\
+28= & \qquad\qquad 28
\end{array}
$$

$x^2+10x+28=0=+m^2-10m-2m\sqrt{-n}+10\sqrt{-n}-n+28=0$. donc $+m^2+10\sqrt{-n}+28=+10m+2m\sqrt{-n}+n$

Tout mon artifice conſiſte à choiſir pour la valeur

Digitized by Google

d'x, un incommenſurable mixte, de telle ſorte qu'il en revienne une équation mêlée des termes m, & n affirmatifs, & négatifs, dont extrayant les racines par ma méthode, je trouve la valeur de m, & de n ; ſouvent même je la découvre par les ſuppoſitions, qu'il faut faire, pour faire évanouir les incommenſurables.

Ainſi je diviſe $10\sqrt{-n}$, & $2m\sqrt{-n}$ par $\sqrt{-n}$, & il reſte 10 d'une part, & 2m de l'autre, ce qui ſuppoſe déja $m=5$. Je continue, & je joints ces 2m, à 10m, qui font 12m ; & dans le premier membre, le nombre 10 joint à 28, fait 38, dont j'extrais les racines.

$$+m^2+38=12m+n$$

	m	n	
1+38	−1	+1	12+1
4+38	−2	+1	24+1
9+38	+3	−2	36+2
25+38	5 =	3	60+5

$m=5 \quad n=3$

$x=-m+\sqrt{-n}$

$x=-5+\sqrt{-3}. \quad x=-5-\sqrt{-3}$ * * 92

Aux deux premiers reſtes le ſigne + eſt placé au côté le plus foible, pour éviter le degré ſans fin.

Or la racine 10, & ces deux racines incommenſurables ſont les trois racines de l'équation propoſée

DEUXIEME EXEMPLE,

Dans le cas irréductible.

SOit l'équation $x^3-90x-100=0$. Ma méthode * m'en a donné la racine 10. Je diviſe cette équation par $x-10=0$, & je n'ai pas de racine * 89

égale pour quotient; mais $x^2+10x+10$.

Ainſi $x^3-90x-100 \left| \begin{array}{l} x^2+10x+10 \\ \hline x-10 \end{array} \right.$

x^3-10x^2

$+10x^2-90x$

$x-10$

$10x^2-100x$

$+100x-90x-100$

ce qui eſt $10x-100$

$x-10$

$10x-10$

Pour avoir maintenant les racines du quotient $x^2+10x+10$, je ſuppoſe

$x=-m-\sqrt{n}$, que je quarre.

$-m-\sqrt{n}$

$+m\sqrt{n}+n$

$-m^2+m\sqrt{n}$

$x^2=m^2+2m\sqrt{n}+n$

$10x=-10m-10\sqrt{n}$

$10=10$

$x^2+10x+10=m^2-10m+2m\sqrt{n}-10\sqrt{n}+n+10=0$

Donc $m^2+2m\sqrt{n}+n+10=+10m+10\sqrt{n}$.

Je diviſe $2m\sqrt{n}$, & $10\sqrt{n}$ par $2\sqrt{n}$, & j'ai $m=5$; & ſubſtituant dans l'équation précedente, 5 au lieu d'm, & 25 au lieu de m^2, j'ai $25+5+n+10=50+5$, ce qui eſt $40+n=55$, donc $n=15$, & x étant $=-m-\sqrt{n}$, a auſſi $x=-5-\sqrt{15}$ *

* 92

A cauſe que m & n ne ſont pas premiers entre eux, ils ne peuvent paroître dans le détail de leur raiſon.

TROISIE'ME

Digitized by Google

TROISIEME EXEMPLE.

SOit $x^3-4x^2+x-4=0$. J'en ai donné * la racine, qui eſt 4. Pour en avoir encore deux autres racines, je la diviſe par $x-4$ * 96

$$x^3-4x^2+x-4=0 \,(\, x+1=0$$

$$x-4$$

$$x^3-4xx$$

$$+x-4$$

$$0 \quad 0$$

J'ai pour quotient $x^2+1=0$. Donc $x^2=-1$, & $x=+\sqrt{-1}$, & $-x=-\sqrt{-1}$. Les trois racines ſont donc $x=4$. $x=+\sqrt{-1}$, $-x=-\sqrt{-1}$.

Je puis avoir les mêmes réſolutions du quotient x^2+1 par deux incommenſurables mixtes affectez de ſignes contraires, ſans quoi l'incommenſurable ne pourroit diſparoître.

$$x=+m+\sqrt{-n}$$

$$x=+m-\sqrt{-n}$$

$$+m\sqrt{-n}-n$$

$$+m^2-m\sqrt{-n}$$

$$x^2=m^2-n$$

$$x^2+1=0 \quad x^2+1=m^2-n+1=0$$

$$m^2+1=n$$

m	n	
1+1	+1	−1 1
1+1	1	= 2 2

$m=1 \quad n=2$

$$x^2=m^2-n$$

$$x^2=1-2=0-1$$

$$x=\sqrt{-1}$$

$$-x=\sqrt{--1}=\sqrt{+1}$$

Cet exemple fait voir que j'euſſe pû dans les exemples précedens multiplier à part ſes deux valeurs, que j'ai démontrées, * * 93

Digitized by Google

QUATRIEME EXEMPLE.

SOit $x^4-3x^3-x^2+9x-6=0$

Donc $x^4+9x=3x^3+x^2+6$ soit $x=\frac{y}{z}$

$$\frac{y^4}{z^4}+9\frac{y}{z}=3\frac{y^3}{z^3}+\frac{y^2}{z^2}+6$$

$$y^4+9yz^3=3y^3z+y^2z^3+6z^4$$

	y		z	
1+9	−1	=	+1	3+1+6
16+18	−2	=	+1	24+4+6
81+27	3	×	1	81+9+6

$y=2 \quad z=1$

Je n'ai que deux racines 1, & 2, & l'expoſant de la haute puiſſance eſt 4; il manque deux racines; & quoiqu'il y ait le ſigne deux fois de ſuite, il n'y a pas de fauſſe racine. Cette regle de M. Deſcartes peut manquer, quand il y a quelque racine incommenſurable. Je ſuppoſe $x^2=n$.

Donc $x=\sqrt{n}$. $x^3=n\sqrt{n}$

$x^4=n^2-3x^3=3n\sqrt{n}$. $9x=+9\sqrt{n}$.

Au lieu de $x^4+9x=3x^3+x^2+6$, équation propoſée.

J'ai $n^2+9\sqrt{n}=3n\sqrt{n}+n+6$. Je diviſe $9\sqrt{n}=3n\sqrt{n}$ par $\sqrt{n}$, j'ai 9 d'une part, & 3n de l'autre.

Donc $n^2+9=3n+n+6$

Donc $n^2+3=4n$ ſoit $n=\frac{y}{z}$

$$\frac{y^2}{z^2}+3=4\frac{y}{z}$$

$$y^2+3z^2=4yz$$

	y		z	
1+3	−1	=	+1	4
4+3	−2	=	+1	8
9+3	3	=	1	12

Digitized by Google

Dans la premiere réſolution $y=1$, & $z=1$, $n=\frac{y}{z}=1$ $x=\sqrt{n}=\sqrt{1}$, & c'eſt la premiere racine incommenſurable.

Dans la deuxiême réſolution $y=3$. $z=1$ $n=\frac{y}{z}=\frac{1}{1}=3$ $x=\sqrt{n}=\sqrt{3}$, & c'eſt la deuxiême racine incommenſurable.

Les quatre racines ſont donc

$x=1$. $x=3$. $x=+\sqrt{1}$. $x=\sqrt{3}$

& même $x=-\sqrt{1}$. $x=-\sqrt{3}$; & voilà plus de racines qu'il ne m'en faut, ſi bien qu'il eſt vrai qu'il y a toujours au moins autant de racines que l'expoſant de la haure puiſſance a d'unitez, mais il peut quelquefois y en avoir davantage. Je ſuppoſe toujours la vérité de ce que j'ai dit. * * 93

CINQUIÉME EXEMPLE.

SOit l'équation $x^5-5x^4-5x^3+25x^2+6x-30=0$.

J'en cherche par ma méthode les racines en nombres entiers, & elle ne m'en donne qu'une, qui eſt 5; & l'expoſant de la haute puiſſance étant 5, il manque quatre racines. Pour les trouver je diviſe cette équation par le binome $x-5$, & le quotient eſt l'équation $x^4-5x^2+6=0$, qui n'ayant que trois termes, n'a pas été produite par quatre binomes, mais par deux, dont le premier terme a été x^2 accompagné dans châque binome d'un nombre entier négatif. D'où il ſuit que x^2 eſt la racine de ces deux équations, & que deux binomes, dont la puiſſance ſoit x accompagnée des deux mêmes nombres négatifs, donneront l'équation $x^2-5x+6=0$. J'extrais par ma méthode les racines de cette derniere équation.

$x^2+6=5x$ soit $x=\frac{y}{z}$

$\frac{y^2}{z^2}+6=5\frac{y}{z}$

$y^2+6z^2=5yz$

	y		z	
$1+6$	-1		$+1$	5
$4+6$	-2	$=$	$+1$	10
$9+6$	-3	$=$	$+1$	15
$16+6$	4	$\times$	1	20

Et je trouve que les racines sont 2, & 3, si bien que $x^2-2=0$, $x^2-3=0$ ont produit l'équation $x^4-5x^2+6=0$, donc $x=+\sqrt{2}$, & $x=-\sqrt{2}$, & encore $x=+\sqrt{3}$, & $x=-\sqrt{3}$, lesquelles quatre racines incommensurables avec la racine $+5$, sont les cinq racines de l'équation proposée.

ARTICLE IV.

SECTION PREMIERE.

Contenant divers Problemes, dont quelques-uns sont de nombres sourds. Je me suis dans cette Section écarté quelquefois de mon sujet, & je crois qu'on me le pardonnera.

I. PROBLEME.

Trouver deux quarrez, dont la différence soit donnée, & que ce soit l'unité.

SOit y la racine de l'un des quârrez, & la racine de l'autre soit $y-z$, donc le premier sera y^2, & le deuxiême $y^2-2zy+z^2$, dont la différence entre ces deux quârrez est z^2-2zy, qui doit être égale à l'unité, donc $z^2-2yz=1$, donc $z^2-1=2yz$; z est arbitraire.

Digitized by G

Prenez que ce ſoit 3, donc $z^2=9$, donc $9-1=8=2yz$, donc le quârré eſt $\frac{16}{9}$, le premier quârré eſt donc $\frac{16}{9}$, & le deuxiême eſt $\frac{16}{9}-8+9$, ou $\frac{16}{9}+1$, qui ſatisfont au Probleme.

REMARQUE.

SI l'on multiplie par le quârré 9, le quârré $\frac{16}{9}+1$, on aura le quârré $16+9=25$.

REMARQUE.

SI l'on eût voulu que la différence des quârrez fût le binaire, il eût fallu ſouſtraire 2 de 9; & mettre $9-2=7=2yz$; donc $\frac{7}{2}=y$; & puiſque $z=3$, donc $\frac{7}{6}=y$, donc $y^2=\frac{49}{36}$, donc le premier quârré eſt $\frac{49}{36}$, & le ſecond eſt $\frac{49}{36}-7+9$, c'eſt-a-dire $\frac{49}{36}+2$

REMARQUE.

ET ſi on multiplie le quârré $\frac{49}{36}+2$ par le quârré 66, on aura le quârré $49+72=121$ quârré de 11; & comme on a eu d'abord deux quârrez égaux à un, quand la différence a été l'unité; & un quârré, & le double d'un autre égaux à un quârré, quand la différence a été le binaire, on aura toujours en entiers un quârré égal à un autre, plus un autre multiplié par la différence des deux quârrez premierement cherchez.

AUTREMENT.

Trouver deux quârrez, dont la différence ſoit donnée, & que ce ſoit l'unité.

SOit y la racine de l'un des quârrez, & $y-z$ la racine de l'autre : l'un eſt donc y^2, & l'autre $y-2yz+z^2$; leur différence z^2-2yz, donc $z^2-2yz=1$. Soit $y=3$, donc $z^2-6z=1$. Soit $\frac{x}{u}=z$, donc $\frac{x^2}{u^2}-\frac{6x}{u}=1$ multipliant par u^2

$$x^2-6xu=u^2$$

$$x^2=u^2+6xu$$

$x > u$ soit $u+f=x$

$u^2+2uf+f^2=u^2+6u^2+6uf=7u^2+6uf$

$f^2=6u^2+4u^2$

$f > u$ soit $u+r=f$

$u^2+2ur+r^2=6u^2+4u^2+4ur=10u^2+4ur$

$r^2=9u^2+2ur$

$r > u$ soit $u+q=r$

$u^2+2uq+q^2=9u^2+2u^2+2uq=11u^2+2uq$

$q^2=10u^2$

$q=\sqrt{10u^2}$

$r=u+q=u+\sqrt{10u^2}$

$f=u+r=2u+\sqrt{10u^2}$

$x=u+f=3u+\sqrt{10u^2}$ $\quad 3u+\sqrt{10u^2}$

$z=\frac{x}{u}=\frac{3u+\sqrt{10u^2}}{u}$ $\quad \frac{3u+\sqrt{10u^2}}{u}$

$6z=\frac{18u+6\sqrt{10u^2}}{u}$ $\quad 3u\sqrt{10u^2+10u^2}$

$z^2=\frac{9u^2+6u\sqrt{10u^2}}{u^2}$ $\quad \frac{9u^2+3u\sqrt{10u^2+10u^2}}{u}$

$\frac{9u^2+6u\sqrt{10u^2+10u^2}}{u}=\frac{19u^2+6u\sqrt{10u^2}}{u}$

$z^2-6z=\frac{19u^2+6u\sqrt{10u^2}}{u^2}$ $\quad -\frac{18u-6\sqrt{10u^2}}{u}$

Et réduisant les fractions à même dénomination.

$\frac{19u^2+6u^2\sqrt{10u^2}}{u^2}$ $-\frac{18u^2-6u^2\sqrt{10u^2}}{u^2}$

$\frac{19+6u^2\sqrt{10u^2}}{u^2}$ $-\frac{18-6u^2\sqrt{10u^2}}{u^2}=19-18=1$

AUTREMENT.

SOit y la racine de l'un des quârrez, & $y+z$ la racine de l'autre. L'un eſt donc y^2, & l'autre $y^2+2yz+z^2$, & leur différence eſt $2yz+z^2$, qui doit être égale à

Digitized by Google

l'unité. Soit $y=3$; donc $2yz+z^2=6z+z^2$, donc

$6z+z^2=1$ soit $\frac{x}{u}=z$

$\frac{x^2}{u^2}+\frac{6xu}{u}=1$, & multipliant par u^2

$x^2+6xu=u^2$

$u>x$ soit $x+f=u$

$x^2+2xf+f^2=x^2+6x^2+6xf=7x^2+6xf$

$f^2=6x^2+4xf$

$f>x$ soit $x+r=f$

$x^2+2xr+r^2=6x^2+4x^2+4xr=x^2+4xr$

$r_2=9x^2+2xr$

$r>x$ soit $x+q=r$

$x^2+2xq+q^2=9x^2+2x^2+2xq=11x^2+2xq$

$q^2=10x^2$

$q>\sqrt{10x^2}$

$r=x+q=x+\sqrt{10x^2}$

$f=x+r=2x+\sqrt{10x^2}$

$u=x+f=3x+\sqrt{10x^2}$ $u=3x+\sqrt{10x^2}$

$z=\frac{x}{u}=\frac{2}{2x}+\sqrt{10x^2}$ $u=3x+\sqrt{10x^2}$

$z'=\frac{x^2}{19x^2+6x\sqrt{10x^2}}$ $3x\sqrt{10x^2+10x^2}$

$b^2=\frac{6x}{3x+\sqrt{10x^2}}$ $9x^2+3x\sqrt{10x^2}$

$z^2+6z=\frac{x^2}{19x^2+6x\sqrt{10x^2}}+\frac{6x}{3x+\sqrt{10x}}$ $u^2=19x^2+6x\sqrt{10x^2}$

Pour réduire ces deux fractions à même dénomination.

$$\frac{19x^2+6x\sqrt{10x^2}}{3x+\sqrt{10x^2}}$$

$$\frac{19x^2\sqrt{10x^2}+60x^2}{57x^2+18x^2\sqrt{10x^2}}$$

tized by Google

Dénominateur $\frac{117x^3+37x^2\sqrt{10x^2}}{}$

Premier. Numérateur $\frac{3x^3+x^2\sqrt{10x^2}}{}$

Deuxiême Numérateur $\frac{114x^3+36x^2\sqrt{10x^2}}{}$

$\frac{117x^3+37x^2\sqrt{10x^2}}{}$

La ſomme des deux fractions eſt

$\frac{117x^3+37x^2\sqrt{10x^2}}{}$

$\frac{117x^3+37x^2\sqrt{10x^2}}{}$

Ce qui eſt égal à l'unité.

II. PROBLEME.

L'aggregé & le Rectangle de deux côtez étant donnez; trouver les côtez.

SOient les côtez a & e, dont l'aggregé $a+e=12$, & le rectangle $ae=24$.

Puiſque $a+e=12$, donc $e=12-a$; & multipliant par a, donc $ae=12a-a^2$, donc $12a-a^2=24$, donc $a^2+24=12a$. Soit $a=\frac{x}{y}$, donc $\frac{x^2}{y^2}+24=12\frac{x}{y}$, & multipliant par y^2, donc $x^2+24y^2=12xy$.

Equation $x^2+24y^2=12yx$,
Où les puiſſances ſont de même part.

$x>y$ ſoit $y+u=x$

$y^2+2yu+u^2+24y^2=12y^2+12yu$

$25y^2+2y^2+u^2=12y^2+12yu$

$13y^2+u^2=10yu$

$u>y$ $y+f=u$

$13y^2+y^2+2yf+f^2=10y^2+10yf$

$14y^2+2yf+f^2=10y^2+10yf$

$4y^2+f^2=8yf$

$f>y$

Digitized by

$f > y$ $\qquad y+r=f$

$4y^2+y^2+2yr+r^2=8y^2+8yr$

$fy^2+2yr+r^2=8y^2+8yr$

$r^2=3y^2+6yr$

$r > y$ $\qquad y+q=r$

$y^2+2yq+q^2=3y^2+6y^2+6yq$

$q^2=8y^2+4yq$

$q > y$ $\qquad y+p=q$

$y^2+2yp+p^2=8y^2+4y^2+4yp$

$p^2=11y^2+2yp$

$p > y$ $\qquad y+n=p$

$y^2+2yn+n^2=11y^2+2y^2+2yn$

$n^2=12y^2$ $\qquad y=1$

$n=\sqrt{12}$	$u=y+f=5+\sqrt{12}$
$p=y+n=1+\sqrt{12}$	$x=y+u=6+\sqrt{12}$
$q=y+p=2+\sqrt{12}$	$a=\frac{x}{y}=\frac{6+\sqrt{12}}{1}=6+\sqrt{12}$
$r=y+q=3+\sqrt{12}$	$e=12-a=12-6-\sqrt{12}=6-\sqrt{12}$
	$e+a=12+\sqrt{n}-\sqrt{12}=12$
$f=y+r=4+\sqrt{12}$	$ea=6+\sqrt{12}\times 6-\sqrt{12}$

$6-\sqrt{12}$

m. $6+\sqrt{12}$

$+6\sqrt{12}-12$

$36-6\sqrt{12}$

$ea=36-12=24$

AUTRE EXEMPLE.

SOient $a+e=5$, & $ae=5$.

Donc $5-a=e$, & multipliant $5-a$ par a, donc $5a-a^2=5$, donc $a^2+5=5a$. Soit $\frac{u}{r}=a$, donc $\frac{u^2}{r^2}+5=5\frac{u}{r}$, & multipliant par r^2, il en revient $u^2+5r^2=5ur$, où les puiſſances ſont de même part.

Equation, $u^2+5r^2=5ur$

$u>r$ ſoit $r+f=u$

$r^2+2rf+f^2+5r^2+5rf$

$6r^2+2rf+f^2=5r^2+5rf$

$r^2+f^2=3rf$. Il eſt indifférent de ſuppoſer $f>r$, ou $r>f$, & l'une & l'autre racine a même ſolution.

$f>r$ ſoit $r+q=f$

$r^2+r^2+2rq+q^2=3r^2+3rq$

$2r^2+2rq+q^2=3r^2+3rq$

$q^2=r^2+rq$

$q=\sqrt{r^2+rq}$

$f=r+q=r+\sqrt{r^2+rq}$

$u=r+f=2r+\sqrt{r^2+r}$

$u=2r+\sqrt{r^2+rq}$

$a=2+\sqrt{1+q}$

$e=5-a$

$e=5-2-\sqrt{1+q}=3-\sqrt{1+q}$. $\sqrt{1+q}=q$ ci-deſſus

$a+e=5$ $ae=6+\sqrt{1+q}-1-q=5$

$ae=5$, comme il paroît ci à côté.

$a=2+\sqrt{1+q}$

$e=3-\sqrt{1+q}$

$-2\sqrt{1+q}-1+q$

$6+3\sqrt{1+q}$

$ae=6+\sqrt{1+q}-1-q$

Digitized by Google

III. PROBLEME.

Trouver deux nombres l, & m, *dont la ſomme* l+m *ſoit égale à leur produit* l, m, *& qu'étant ajoûtez à leurs quarrez* l^2, & m^2, *le tout*, l^2, & m^2+l+m *faſſe un nombre donné* 20.

Soit l+m, ou ml=a. Alors $a^2=l^2+m^2+2lm$. Mais $l^2+m^2+lm=20$, donc ajoûtant lm par tout, $l^2+m^2+2lm=20+lm$, donc il y aura $a^2=20+a$

soit $a=\frac{x}{y}$

donc $\frac{x^2}{y^2}=20+\frac{x}{y}$, & multipliant par y^2, il y aura

$$x^2=20y^2+xy$$

d'où $x>y$	soit $y+u=x$
$y^2+2yu+u^2=y^2+yu+20y^2$	
$u^2+yu=20y^2$	
$u>y$	soit $y+r=u$
$y^2+2yr+r^2+y^2+yr=20y^2$	
$r^2+3yr=18y^2$	
$r>y$	soit $y+f=r$
$y^2+2yf+f^2+3y^2+3yf=18y^2$	
$f^2+5yf=14y^2$	
$f>y$	soit $y+q=f$
$y^2+2yq+q^2+5y^2+5yq=14y^2$	
$q^2+7yq=8y^2$	

$y=1$	$u=y+r=4$	$a^2=20+a$
$q=1$	$x=y+u=5$	$25=20+5$
$f=y+q=2$	$\frac{x}{y}=x=a=5$	
$r=y+f=3$		

5 doit donc être égal à l+m, & à lm, ce qui eſt le

deuxiême cas du Theorême précédent, par lequel il eſt démontré que $l=2+\sqrt{1+q}$, & que $m=3-\sqrt{1+q}$, leſquels ſatisfont au Problême, comme on va voir

$$l=2+\sqrt{1+q}$$
$$2+\sqrt{1+q}$$
$$4-2\sqrt{1+q}$$

donc $l^2=4+4\sqrt{1+4+1+q}$

ajoûtez $2+\sqrt{1+q}$

donc $l^2+l=6+5\sqrt{1+q}+1+q=7+\sqrt{1+q}+$

$$m=3-\sqrt{1+q}$$
$$3-\sqrt{1+q}$$
$$-3\sqrt{1+q}$$
$$-3\sqrt{1+q}$$

donc $m^2=9-6\sqrt{1+q}=10-6\sqrt{1+q}+q$

ajoûtez $3-\sqrt{1+q}$

$m^2+m=13-7\sqrt{1+q}+q$

$l^2+l=7+5\sqrt{1+q}+q$

$m^2+m=13-7\sqrt{1+q}+q$

donc $l^2+m^2+l+m=20-2\sqrt{1+q}+2q$

Et parceque $2\sqrt{1+q}=2q$

donc $l^2+m^2+l+m=20$.

AVERTISSEMENT.

Dans ces deux exemples châque reſte peut ſatisfaire au Problême.

Dans le premier exemple j'ai pouſſé l'opération juſqu'au reſte $n^2=12y^2$, ou bien $n^2=12$, d'où j'ai tiré $n=\sqrt{12}$. Je pouvois ne pouſſer l'opération, par exemple, que juſqu'au reſte $p^2=11y^2+yp$, & en extraire

Digitized by Google

ainſi la racine, donc $p=\sqrt{11+2yp}$, & à cauſe que $y=1$,

donc $p=\sqrt{11+2p}$

$q=y+p=1+\sqrt{11+2p}$

$r=y+q=2+\sqrt{11+2p}$

$f=y+r=3+\sqrt{11+2p}$

$u=y+f=4+\sqrt{11+2p}$

$x=y+u=5+\sqrt{11+2p}$

$a=\frac{x}{y}=x=5+\sqrt{11+2p}$

$c=12-a=12-5-\sqrt{11+2p}=7-\sqrt{11+2p}$

$a+c=12$ $\quad a=5+\sqrt{11+2p}$

$ac=24$ $\quad c=7-\sqrt{11+2p}$

$-\sqrt{11+2p}-11-2p$

$+35+7\sqrt{11+2p}$

$ac=35+2\sqrt{11+2p}-11-2p$

$2\sqrt{11+2p}-2p=$ zero ci-deſſus

$35-11=24$

$ac=24$

Je pouvois même pouſſer l'opération au de là du reſte $n^1=12y^2$

$n^1=12y^2$

donc $n>y$ $\quad$ ſoit $y+m=n$

donc $y^2+2my+m^2=12y$

$2m^2+m^2=11y^2$, ou bien $2m+m^2=11$

$m^2=11-2m$

$m=\sqrt{11-2m}$

$n=y+m=1+\sqrt{11-2m}$

$p=y+n=y+\sqrt{11+2m}$

$q=y+p=3+\sqrt{11-2m}$

$r=y+q=4+\sqrt{1-2m}$

$f=y+r=5+\sqrt{11-2m}$

$u=y+f=f+\sqrt{11-2m}$

$x=y+u=7+\sqrt{11-2m}$

$x=a$

$a=7+\sqrt{11-2m}$

by Google

$12-a=e=12-7-\sqrt{11-2m}=5-\sqrt{11-2m}$

$e=5-\sqrt{11-2m}$

$a+e=12$

$ae=24$. Ce qui paroîtra en multipliant $7+\sqrt{11-2m}$, par $5-\sqrt{11-2m}$

C'eſt bien plus, le premier reſte donne les racines de la même manière.

L'équation naturelle eſt $a^2+24=12a$

Donc $a^2=12a-24$ $e=12-\sqrt{12a-24}$

$a=\sqrt{12a-24}$ $a=\sqrt{12a-24}$

$e=12-a=12-\sqrt{12a-24}$. $ae=12\sqrt{12a-24}-12a+24$

$a+e=12$. $12\sqrt{12-24}-12a=$ zero, donc $ae=24$

$ae=24$, ce qui paroît en multipliant

$12-\sqrt{12a-24}$

par $\sqrt{12a-24}$

Je ne m'étendrai pas à faire voir les mêmes choſes dans le deuxième exemple.

Cela ſuffit pour faire voir combien Herigone eſt borné.

IV. PROBLEME.

103 *Faire un quârré de* $2yz+z^2$

SOit y nombre donné, & de $2y$ ſoit retranchée telle partie qu'on voudra, & à cette partie retranchée, & à la moitié du reſte ſoit trouvé le troiſiême proportionel, ce troiſiême proportionel ſera la valeur de z, & la racine du quârré cherché ſera z + le moyen proportionel entre z, & la partie de $2y$. Ou, ce qui revient au même, la racine du quârré cherché ſera la ſomme des deux derniers nombres de ces trois proportionels.

Digitized by Google

Soit par exemple $y=5$, & $2yz=10z$, de 10 ôtez 2, reſte 8, dont la moitié eſt 4, & ſoient 2 : 4 : 8 :—:, 8 ſera égal à z, & $10z=80$, & $z^2=64$, & $10z+z^2=144$ quârré de 12, & $12=4+8$.

Que 2y ſoit encore égal à 9, ainſi $9z+z^2$. Otez 3 de 9, reſte 6, dont la moitié eſt 3, & 3 : 3 : 3 :—:, & $3=z$, & $9z=27$, & $z^2=9$, & $27+9=36$ quârré de 6, & $6=3+3$.

Qu'il y ait encore $15z+z^2$.

De 15 ôtez 3, reſte 12, dont la moitié eſt 6, & ſoient 3 : 6 : 12 :—: $112=z$, & $15z=180$, & $z^2=144$, & $15z+z^2=324$, quârré de 18, & $18=6+12$.

Que ſi le prémier ou le troiſiême proportionel eſt un nombre rompu, la ſolution ne peut être en entiers.

COROLLAIRE.

DE là il eſt aiſé de bâtir un triangle rectangle en nombres, c'eſt-à-dire de trouver un quârré, dont la racine ſera l'hypoténuſe du triangle, & qui ſera compoſé de deux autres quârrez, dont les racines ſeront les côtez autour de l'angle droit de ce triangle rectangle: car $y^2+2yz+z^2$ eſt un quârré, dont la racine eſt $y+z$; y^2 eſt un autre quârré, & par ce problême $2yz+z^2$ en eſt un autre. Ayant donc mis tel nombre qu'on voudra pour y, on aura en nombres un triangle rectangle, $y=5.\ z=8.\ y+8=13.\ y^2+2yz+z^2=169.\ y^2=25.\ y-1+z$, ou $4+8=12$, $2yz+z^2=144.\ 25+144=169$.

AUTRE COROLLAIRE.

SOient pris trois nombres continuellement proportionels a. b. c; $\frac{1}{2}a+b+c$ ſera égal à $y+z$, qui eſt l'hypoténuſe, $\frac{1}{2}a+b$ ſera égal à y, qui eſt l'un des côtez autour de l'angle droit. Ainſi ſoient pris 18 : 6 : 2 :—:, 18 ſera $=a$, $6=b$, & $2=c$, $\frac{1}{2}a=9$, & $\frac{1}{2}a+b+c=17$ hypoténuſe, dont le quârré eſt 289, $\frac{1}{2}a+b=15$ l'un des côtez, dont le quârré eſt 225, & $b+c=8$ l'autre côté, dont le quârré eſt 64, & $225+64=289$ quârré de 17.

Soient encore pris 16 : 8 : 4 :—: $\frac{1}{2}a+b+c=20$ hy-

poténuſe, dont le quârré eſt 400; $\frac{1}{2}a+b=16$ l'un des côtez, dont le quârré eſt 256, & $b+c=12$ l'autre côté, dont le quârré $=144$, & $256+144=400$.

De même ſoient 8:20:5:—:40+20+5=65, dont le quârré eſt 4225; 40+20=60, dont le quârré eſt 3600, & 20+5=25, dont le quârré =625, & 3600, & 625=4225.

On fera un autre triangle rectangle ſur la même hypoténuſe 65, en prenant 52:26:13:—:. J'ai pris ces trois dèrnières proportions, de ce que Bachet dit que 4225 peut être diviſé quatre fois en deux quârrez, dont les racines ſont 60, & 25, de quoi je m'étois apperçû, & encore 63, & 1656, & 33, & 52, 39. C'eſt ſur les huitième & neuviême queſtions du deuxiême livre de Diophante à la fin.

AVERTISSEMENT.

CE Corollaire peut être encore démontré d'une autre manière. Soit $\frac{a^2}{2}+b+c$ l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, $\frac{a^2}{2}+b$ l'un de ſes côtez, & b+c l'autre. Le quârré de l'hypoténuſe ſera égal à la ſomme des quârrez des côtez; & les termes ſemblables étant retranchez, il reſtera ac du quârré de l'hypoténuſe, & b^2 de la ſomme des quârrez des côtez, & ac ſera $=b^2$, donc a:b:c:—:, où a eſt double de $\frac{a}{2}$ prémier tèrme de l'hypoténuſe $\frac{a}{2}+b+c$.

AVERTISSEMENT.

DU Corollaire précédent on peut tirer l'art de diviſer un nombre quârré en deux quârrez. Il faut ſur ſa racine, comme hypoténuſe, bâtir un triangle rectangle.

AVERTISSEMENT.

ET autant de fois que ſur une même hypoténuſe on pourra bâtir en nombres un triangle rectangle, autant de fois on diviſera en deux quârrez, le quârré de l'hypoténuſe.

V. PROBLEME.

V. PROBLEME.

J'Ai cru que par cette voye il me ſeroit aiſé de démontrer, qu'on ne peut trouver en nombres, deux cubes qui ſoient égaux à un cube. 104

Soit un nombre quelconque a+b+c, dont le cube ſoit $a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+b^3+3ac^2+3cb^2+3bc^2$. Soit a+b une portion quelconque du nombre a+b+c, dont le cube ſera $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, & ſoit b+c une autre portion, dont le cube ſera $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$. Je ſuppoſe que les cubes de a+b, & de b+c ſoient égaux au cube de a+b+c. J'ôte de part & d'autre les termes pareils, & il me reſte b^3 d'une part égal à $6abc+3a^2c+3ac^2+c^3$ d'autre part. Donc $6abc+3a^2c+3ac^2+c^3$ eſt un cube, donc $6abc=a^3$, & diviſant par a, $6bc=a^2$; & parceque ces deux cubes ſont égaux, leurs racines ſont égales, ſçavoir b=a+c. J'ai donc deux équations $6bc=a^2$, & b=a+c. Donc multipliant cette derniere équation par bc, j'aurai $6bc=6ca+6c^2$; mais $6bc=a^2$, qui eſt la premiere équation, donc $a^2=bc^2+6ca$.

a > c ſoit c+d=a

$c^2+2cd+d^2=6c^2+6c^2+6cd=12c^2+6cd$

$d^2=11c^2+4cd$

d > c ſoit c+f=d

$c^2+2cf+f^2=11c^2+4c^2+4cf=15c^2+4cf$

$f^2=14c^2+2cf$

f > c ſoit c+g=f

$c^2+2cg+g^2=14c^2+2c^2+2cg=16c^2+2cg$

$g^2=15c$. Donc c eſt un nombre ſourd, donc a+b+c eſt un nombre ſourd contre l'hypotheſe.

Je n'ai pas examiné ſi par la même voye on ne démontreroit pas que de toutes les puiſſances au-deſſus du quarré, aucune ne peut être diviſée en deux autres puiſſances de même nom, & ſi deux ou trois exemples ne feroient pas voir que la démonſtration s'étendroit à tout. C'eſt une

V.

zed by Googl

observation de feu M. de Fermat sur la huitième question du deuxième livre de Diophante.

VI. PROBLEME.

105 DIviser 25 en deux quarrez. Il faut trouver $x^2+y^2=25$.

Soit $5-z=x$, & $5-u=y$.

Puisque $5=z=x$, donc $25-10z+z^2=x^2$

Puis $5-u=y$, donc $25-10u+u^2=y^2$

Donc $50-10z-10u+z^2+u^2=y^2+y^2=25$

Donc $25-10z-10u+z^2+u^2=0$

Donc $25+z^2+u^2=10z+10u$.

Il y a autant de raison de suppôser $z>u$, que de suppôser $u>z$.

Soit donc $z>u$ soit $u+f=z$

Donc $25+u^2+2uf+f^2+u^2=10u+10f+10u$

$25+2u^2+2uf+f^2=20u+10f$

Donc $f>u$ soit $u+r=f$

$25+2u^2+2u^2+2ur+u^2+2ur+r^2=20u+10u+10r$

$25+5u^2+r^2+4ur=30u+10r$

Donc $r>u$ soit $u+q=r$

$25+5u^2+u^2+2uq+q^2+4u^2+4uq=30u+10u+10q$

$25+q^2+10u^2+6uq=40u+10q$

$q>u$ soit $u+p=q$

$25+u^2+2up+p^2+10u^2+6u^2+6up=40u+10u+10p$

$25+p^2+17u^2+8up=50u+10p$

$p>u$ soit $u+n=p$

$25+u^2+2un+n^2+17u^2+8u^2+8un=50u+10u+10n$

$25+n^2+26u^2+10un=60u+10n$

$n>u$ soit $u+m=n$

$25+u^2+2um+m^2+26u^2+10u^2+10um=60u+10m+10u$

$25+m^2+37u^2+12um=70u+10m$

$m>u$ soit $u+l=m$

Digitized by Google

$25+u^4+2ul+l^2+37u^2+12u^3+12ul=70u+10u+10l$

$25+l^2+50u^2+14ul=80u+10m$, où les préfix sont égaux.

$u=1$	$r=u+q=6$
$l=i$	$f=u+r=7$
$m=u+l=2$	$z=u+f=8$
$n=u+m=3$	$x=5-z=5-8=-3.x^2=9$
$p=u+n=4$	$y=5-u=5-1=4.y^2=16$
$q=u+p=5$	

VII. PROBLEME.

106

DIviſer 169 en deux quarrez. Il faut trouver $x^2+y^2=169$. Soit $13-z=x$, & $13-u=y$.

Puiſque $13-z=x$, donc $169-26z+z^2=x^2$

Puiſque $13-u=y$, donc $169-26u+u^2=y^2$

Donc $338-26z-26u+z^2+u^2=x^2+y^2=169$

Donc $169-26z-26u+z^2+u^2=0$

Donc $169+z^2+u^2=26z+26u$

Donc $z>u$ ſoit $u+f=z$

Donc $169+u^2+2uf+f^2+u^2=26u+26f+26u$

$169+2u^2+2uf+f^2=52u+26f$

Donc $f>u$ ſoit $u+r=f$

$169+2u^2+2u^2+2ur+u^2+2ur+r^2=52u+26u+26r$

$169+5u^2+4ur+r^2=78u+26r$

Donc $r>u$ ſoit $u+q=r$

$169+5u^2+4u^2+4uq+u^2+2uq+q^2=78u+26u+26q$

$169+10u^2+6uq+q^2=104u+26q$

Donc $q>u$ ſoit $u+p=q$

$169+10u^2+6u^2+6up+u^2+2up+p^2=104u+26u+26p$

$169+17u^2+8u^2+8un+u^2+2un+n^2=130u+26p$

gitized by Google

Donc $p > u$ soit $u+n=p$

$169+17u^2+8u^2+8un+u^2+2un+n^2=130u+26n+26n$

$169+26u^2+10un+n^2=156u+26n$

Donc $n > u$ soit $u+m=n$

$169+26u^2+10u^2+10um+u^2+2um+m^2=156u+26u+26m$

$169+37u^2+12um+m^2=182u+26m$

Donc $m > u$ soit $u+l=m$

$169+37u^2+12u^2+12ul+u^2+2ul+l^2=182u+26u+26l$

$169+50u^2+14ul+l^2=208u+26l$, où les préfix ſont égaux

$u=1$

$l=1$

$m=u+l=2$

$n=u+m=3$

$p=u+n=4$

$q=u+p=5$

$r=u+q=6$. $x=13-z=13-8=5$. $x^1=25$

$f=u+r=7$. $y=13-u=13-1=12$. $y^1=\frac{144}{169}$

$z=u+f=8$

AVERTISSEMENT.

A Meſure que l'abſolu eſt plus grand, l'extraction des racines eſt plus laborieuſe, & elle eſt preſque impraticable, quand les hautes puiſſances des racines ſont en un même membre de l'équation, & accompagnées d'un grand abſolu. Que ſi ces équations peuvent avoir pluſieurs ſolutions, l'embarras devient plus grand, parceque preſque après châque ſouſtraction, on peut prendre les deux partis contraires, c'eſt-à-dire, ſouſtraire reciproquement les deux racines l'une de l'autre. Outre le péril de tomber dans des équations, dont les racines ſont des nombres compôſez entre-eux; il faut dans ces occaſions ſe borner, & ne pas ſuivre toutes les variations, ce qui pourroit être un travail infini.

Digitized by Google

VIII. PROBLEME.

TRouver un nombre qui diviſé par 28, laiſſe 13, par 19 laiſſe 10, & par 15 laiſſe 7. Je commence par les deux dèrnières conditions, qui contiennent les nombres les plus ſimples, & je chèrche un nombre z, qui diviſé par 19, laiſſe 10, & qui diviſé par 15, laiſſe 7. 107

Puiſque z diviſé par 19, laiſſe 10, donc z—10 diviſé par 19 ne laiſſe rien. Soit $\frac{z-10}{19}=x$, donc $19x=z-10$, donc $z=19x+10$, & c'eſt la prémière équation.

Puiſque z diviſé par 15, laiſſe 7, donc z—7 diviſé par 15 ne laiſſe rien. Soit $\frac{x-7}{15}=y$, donc $z-7=15y$; donc $z=15y+7$, & c'eſt la deuxiême équation.

Il faut réduire ces deux équations à une; puiſque $z=19x+10$, & que $x=15y+7$, donc $19x+3=15y$, où le nombre abſolu eſt 3.

Je puis faire mes équations d'une autre ſorte par l'addition.

1°. Puiſque z diviſé par 19 laiſſe 10, donc ajoûtant 9 à z, z+9 diviſé par 19, ne laiſſe rien.

Soit $\frac{z+9}{19}=x$, donc $19x=z+9$, donc $z=19x-9$.

2°. Puiſque z diviſé par 15 laiſſe 7, donc ajoûtant 8 à z, z+8 diviſé par 15, ne laiſſe rien.

Soit $\frac{z+9}{19}=x$, donc $19x=z+9$, donc $z=19x-9$.

3°. Puiſque z diviſé par 15 laiſſe 7, donc ajoûtant 8 à z, z+8 diviſé par 15, ne laiſſe rien.

Soit $\frac{7+8}{15}=y$, donc $z+8=15y$, donc $z=15y-8$.

Pour réduire ces deux équations, puiſque $z=19x-9$,

zed by Google

& que $z=15y-8$, donc $19x-9=15y-8$, & tranſpôſant les nombres négatifs $19x+8=15y+9$, & retranchant 3 de part & d'autre, reſte $19x\doteq 15y+1$, & ici le nombre abſolu n'étant que l'unité, au lieu que dans la réduction précédente le nombre abſolu étoit 3, il ſera plus naturel de procéder par cette nouvelle réduction, quoique ces deux équations ſoient également aiſées à réſoudre.

Il faut donc réſoudre cette derniere équation

$$19x=15y+1$$

Donc $y>x$	ſoit $x+u=y$
Donc $19x=15x+15u+1$	
Donc $4x=15u+1$	
Donc $x>u$	ſoit $u+r=x$
Donc $4u+4r=15u+1$	
Donc $4r=11u+1$	
Donc $r>u$	ſoit $u+q=r$
Donc $4u+4q=11u+1$	
Donc $4q=7u+1$	
Donc $q>u$	ſoit $u+p=q$
Donc $4u+4p>7u+1$	
Donc $p>3u+1$	

Le préfix 4 eſt égal au préfix 3+1

Donc $p=1$, & $u=1$

Donc $u+p=q=2$

$u+q=r=3$	$x+u=y=5$
$u+r=x=4$	$z=19x-9=67$. z encore $=15y-8=69$.

Maintenant ſi 67 diviſé par 28, laiſſoit 13, le problême ſeroit réſolu, mais 67 diviſé par 28, laiſſe 11. Si

Digitized by Go

donc à 67 j'ajoûte un nombre qui diviſé par 19 & par 15, ne laiſſe rien, & qui diviſé par 28 laiſſe 2, ce nombre joint à 67 étant diviſé par 28, laiſſera 11+2, ou 13, & diviſé par 19, il laiſſera 10, & par 15 il laiſſera 7. Or la prémière de ces conditions, qui eſt de ne laiſſer rien, étant diviſé par 19 ou par 15, ne peut convenir qu'au produit de 19 par 15, qui eſt 285, & à ſes multiples.

Et pour la deuxiême condition requiſe, qui eſt de laiſſer 2, 285 n'y ſatisfait pas, & s'il ne laiſſoit rien, le problême ſeroit impoſſible, mais étant diviſé par 28, il laiſſe 5. Il faut donc chercher un multiple de 285, que j'appellerai 285q, lequel étant diviſé par 28, laiſſe 2.

Or 285q=280q+5q, & 280q diviſé par 28, ne laiſſe rien, il faut donc chercher 5q, qui diviſé par 28, laiſſe 2, ou qui ſoit égal à un multiple de 28, & 2 au de-là. Ainſi 5q=28r+2, ce qui ſe doit réſoudre par l'opération précédente.

Puiſque 5q=28r+2

Donc q>r	ſoit r+p=q
Donc 5r+5p=28r+2	
Donc 5p=23+2	
Donc p>r	ſoit r+n=p
Donc 5r+5n=23r+2	
Donc 5n=18r+2	
Donc n>r	ſoit r+m=n
Donc 5r+5m=18r+2	
Donc 5m=13+2	
Donc m>r	ſoit r+l=m
Donc 5r+5l=13r+2	
Donc 5l=8r+2	
Donc l>r	ſoit r+k=l
Donc 5r+5k=8r+q	

Donc $5k=3r+2$, où les préfix ſont égaux de part & d'autre.

$k=1$, & $m=1$

$r+k=l=2$ multipliez 285

$r+l=m=3$ par 6=9

$r+m=n=4$ 1710=2859

$r+n=p=5$ ajoûtez 67

$r+p=q=6$ 1777 nombre cherché

$5q=30-28r+2=30$

ARTICLE V.

Des Suites, ou Séries, ou Approximations.

LEs approximations des racines d'une équation, ſont des valeurs approchées de leur véritable valeur.

Les ſuites ou séries ne ſont autre chôſe que la ſuite naturelle des ſouſtractions qui font le détail d'une raiſon.

Exemple pris du détail par lettres de la raiſon, que l'on appelle moyenne & extrême raiſon, qui n'a qu'une ſouſtraction à châque grade, & dont l'équation eſt $a^2=b^2+ab$.

Equation $a^2=b^2+ab$. $a=1$. $b=1$. $a=b$. $ab=1$.

L'équation vaut donc $1=1+1$, ce qui eſt $1=2$, & diviſant 1 & 2 par 2, ce ſera $\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$, où la différence eſt $\frac{1}{2}$.

$a>b$. Soit $b+c=a$

$b^2+2bc+c^2=b^2+b^2+bc$

$c^2+bc=b^2$

$b=1$. $c=1$. $b+c=a=2$. $a^2=4$. $b^2=1$. $ab=2$. L'équation propôſée eſt donc $4=1+2$, ou bien $4=3$, & diviſant par 4, c'eſt $\frac{4}{4}=\frac{3}{4}$, & la différence eſt $\frac{1}{4}$

$b>c$. Soit $c+d=b$

c^2+2cd

Digitized by Google

$c^2+2cd+d^2=+c^2+c^2+cd$

$d^2+c^2=c^2$

$c=1.\ d=1.\ c+d=b=2.$

$b^2=4.\ b+c=a=3.\ a^3=9$

$:ab=6$, donc l'équation eſt

$9=4+6$, ce qui eſt $9=10$.

diviſant par $10\ \frac{9}{10}=\frac{10}{10}$, la différence eſt $\frac{1}{10}$.

Les différences ou les reſtes vont toujours en décroiſſant, & par conſéquent ce ſont autant d'approximations de la valeur des racines & des approximations de l'entière réſolution de l'équation par la ſuite des diminutions des différences, dont l'entière ceſſation fait la réſolution : ſçavoir en un nombre cèrtain de ſouſtractions, quand a : b raiſon des racines eſt de nombre à nombre, ou dans une infinité de ſouſtractions, quand a : b eſt raiſon ſourde.

Des mèmes approximations & des mèmes ſuites ou ſéries par membres.

J'Ai démontré * que dans le détail d'une raiſon, châque *tout* contient ou vaut le prémier *tout* de châque grade ſuivant. Ainſi la racine $\underline{a}$, qui eſt le prémier *tout* contient ou vaut le prémier *tout* de châque grade, horſmis le prémier. Ainſi encore $\underline{b}$, qui eſt la deuxiême racine, & le prémier *tout* du deuxiême grade, vaut le prémier *tout* du troiſiême grade, & celui des grades ſuivants. Et enfin, $\underline{a}-\underline{b}$, qui eſt la difference de ces racines, & prémier *tout* du troiſiême grade, vaut le prémier *tout* du quatriême grade, & celui de châcun des grades ſuivants. Et c'eſt ce que l'on appelle approximations & ſuites ou ſéries dans leſquelles plus on prend un tout éloigné du prémier plus on approche des valeurs qu'on chèrche. * 56

Suite ou Série en nombres de la moyenne & extrême raiſon.

$a = {}^{b}_{1}, +{}^{a}_{1} - {}^{b}_{1}, -{}^{a}_{1} + {}^{b}_{2}, +2-3, -3+5, +5-8, -8+13,$
$+13-21, -21+34, +34-55$

$b = -{}^{b}_{1} + {}^{a}_{1}, +{}^{b}_{2} - {}^{a}_{1}, -3+2, +5-3, -8+5, +13-8,$ &c.

$a-b = -{}^{a}_{1} + {}^{b}_{2}, +{}^{a}_{2} - {}^{b}_{1}, -3+5,$ &c.

Equation $6^{1} = b^{1} + ab$

Dans ces ſéries les tèrmes de châque reſte ſont en telle raiſon, qu'elle exprime * toutes les ſouſtractions faites juſqu'à celle, dont eſt ce reſte incluſivement. Et comme plus on fait de ſouſtractions de ſuite, plus on marche vêrs la réſolution de l'équation; il ſuit que châque reſte eſt une nouvelle approximation vêrs cette réſolution, ſoit qu'elle arrive dans un cèrtain nombre de ſouſtractions, ſoit que l'on n'y puiſſe parvenir que par un nombre infini de ſouſtractions que la ſeulè Géométrie peut faire tout d'un coup par une ligne courbe tantôt d'une nature, tantôt d'une autre.

* 33.

a
b
a—b
b
a—b
—a+2b
+a—b
—a+2b
+2a—3b
—a+2b
+2a—3b
—3a+5b
+2a—3b
—3a+5b
+5a—8b
—3a+5b
+5a—8b
—8+13b
+5a—8b
—8a+13b
+13a—21b

Je reviens aux ſéries par lettres, qui ne ſont autres que la table générale de la raiſon géométrique, & l'on voit bien que la ſuite que je viens de donner par nombres, n'eſt qu'un cas de cette table générale, où l'on ſuppôſe que tous les multiplians, $\underline{e}$, $\underline{f}$, $\underline{t}$, $\underline{q}$, ne ſont châcun que l'unité.

Digitized by Google

ARTICLE VI.

Examen de la Table générale des Grades des raiſons géométriques, qui ſert de lemmes.

I. AVERTISSEMENT.

DAns châque reſte des grades en rang pair, l'un des tèrmes ſera la racine b avec l'unité pour préfix. 108

Car le deuxiême grade n'eſt que le produit du prémier grade multiplié par f, & outre cela le tèrme +1b. Le quatriême grade n'eſt que le produit du troiſiême multiplié par q, plus le deuxiême grade dans lequel eſt le tèrme +1b. Le ſixiême grade n'eſt que le produit du cinquiême multiplié par c, plus le quatriême grade dans lequel eſt le tèrme +1b; & ainſi de ſuite à l'infini. Donc, &c. c. q. f. d.

II. AVERTISSEMENT.

LA ſomme des préfix d'a dans le dèrnier reſte d'un grade, étant multipliée par la ſomme des préfix de b dans châque reſte du grade ſubſéquent, le produit ſera égal à la ſomme des préfix d'a dans châque reſte de ce deuxiême grade multipliez par les préfix de b du dèrnier reſte du prémier de ces deux grades, à l'unité près, qui ſera toûjours la différence de ces deux produits. 109

Car châque reſte du deuxiême de ces deux grades, n'eſt que le dèrnier reſte du prémier multiplié par une même lettre, à l'unité près, qui eſt le préfix de b dans l'un des deux reſtes; donc les préfix d'a ſont en même raiſon aux préfix de b dans ces reſtes de l'un & l'autre grades: doncces préfix multipliez en croix doivent faire les mêmes ſommes, à l'unité près, qui eſt toûjours leur différence. c. q. f. d.

Digitized by Google

I. COROLLAIRE.

110 COmme ces deux reſtes conſécutifs ont les mêmes préfix, ſoit qu'ils ſoient * d'un même grade, ou de deux grades différens, il s'enſuit de l'Avertiſſement précédent, que leurs préfix multipliez en croix, doivent toûjours faire une même ſomme à l'unité près; parceque le prémier d'entre eux peut être le dèrnier de ſon grade, & l'autre être le prémier reſte du grade ſuivant, cela ne dépendant que de leurs ſignes, & non de leurs préfix. * 49

II. COROLLAIRE.

DE là s'enſuit qu'un même reſte a toûjours cette propriété, pour le moins avec deux reſtes différens, ſçavoir avec le reſte qui le précede immédiatement, & avec le dèrnier reſte du grade qui précede celui, dont eſt le prémier de ces deux reſtes. Ainſi par exemple.

Les préfix 1, & 3 du dèrnier reſte du prémier grade avec 1, & 4 préfix du prémier reſte du deuxiême grade multipliez en croix, font 3, & 4, dont la différence eſt l'unité: avec 2, & 7 préfix du deuxiême reſte du deuxiême grade, ils font 8, & 7, & avec ceux du troiſiême reſte du même grade, ils font 9, & 10, où toûjours l'unité eſt la différence: 4 & 13 préfix du quatriême reſte du deuxiême grade font 40, & 39 avec 3 & 10, préfix du reſte immédiatement précédent, parceque cela devroit être ainſi, ſi 4 & 13 avoient des ſignes contraires à ceux qu'ils ont, & qu'ils commençaſſent un autre grade, & les mêmes 4 & 13 font 12, 13 avec 1, & 3 préfix du dèrnier reſte du grade antérieur, comme il a été remarqué.

+ 1	— 1
+ 1	— 2
+ 1	— 3
— 1	+ 4
— 2	+ 7
— 3	+ 10
— 4	+ 13
+ 5	— 16
9	29

Enfin 5 & 16, préfix du prémier reſte du troiſiême grade, font 65, & 64 avec 4 & 13, préfix du dèrnier

Digitized by Google

reſte du grade précédent, & les mêmes préfix 5 & 16 font 15 & 16 avec les reſtes du prémier grade, comme ſi le reſte + 5 — 16 avoit d'autres ſignes, ainſi — 5 + 16, & qu'il fût encore du deuxiême grade.

Le dèrnier reſte 9 & 29, auquel je n'ai pas donné de ſignes, fera 145, & 144 avec 5 & 16, préfix du reſte précédent, ſi je mets — dèvant 9, & + devant 29, ce qui commenceroit un autre grade, & ſi au contraire je mets + 9 — 29, ce qui ſera continuër le grade, alors 9 & 29 avec 4 & 13, préfix du dèrnier reſte du grade antérieur, feront 116, & 117. Tous exemples, où l'on voit que l'unité eſt conſtamment la différence des prôduits. Donc, &c.

AVERTISSEMENT.

On voit bien que cette comparaiſon des reſtes peut être variée infiniment.

ARTICLE VI.

SECTION DEUXIEME III

Des Equations du ſecond dégré.

PROBLEME.

CONſtruire les formules des équations régulières du ſecond degré.

Soient pris à diſcretion dans la Table deux reſtes diſſignes & conſécutifs, que j'appellerai *reſtes générants*, & leſquels je ſuppôſe faire proportion, que j'appellerai *proportion générante*, avec les deux racines $\underline{a}$ & $\underline{b}$, dont je ſuppôſe toujours $\underline{a}$ plus grande que $\underline{b}$. Et multipliant enſemble les extremes, & encore enſemble les moyens, les produits de ces deux multiplications ſeront égaux, cette égalité, étant réduite aux moindres tèrmes affirmatifs, ſera une formule d'une équation du deuxiême degré.

Soient pris, par exemple, pour reſtes générants, le prémier & le deuxiême reſtes de la Table, & ſoit la pro-

Digitized by Google

portion générante a : b : : a — pb : — ſa + ſpb + b. Le produit des extrêmes — ſa² + ſpba + ba ſera égal au produit des moyens ba — pb², & cette égalité étant réduite à celle-ci ſa² = pb² + ſpba ſera la prémiere formule d'une équation régulière du ſecond degré, dont tous les tèrmes ſeront poſitifs.

112 La ſuppoſition que je fais dans ce problême n'eſt pas vaine ; car quand je ſuppôſe la proportion générante, & que par exemple je mets a:pb::a—pb:—ſa+ſpb+b, & que je conclus que le produit des extremes ſera égal au produit des moyens, je fais ce que je ſuppôſe. Je détèrmine la valeur d'a : b ſur ce piéd-là, c'eſt-à-dire ſur la valeur qui rend l'équation vraie.

COROLLAIRE.

113 Comme je ſuppôſe toûjours que dans la raiſon a : b, a marque le plus grand tèrme, de-là il s'enſuit que dans la proportion générante, le prémier reſte générant, eſt plus grand que le ſecond, & d'autant qu'ils expriment les reſtes des deux grades conſécutifs, il s'enſuit auſſi que le prémier reſte générant eſt détèrminé à marquer le dèrnier reſte de ſon grade, & par conſéquent que le ſecond étant plus petit que le prémier, comme b eſt plus petit que a, il marque auſſi le dèrnier reſte de ſon grade, car le dèrnier reſte d'un grade antérieur n'eſt plus grand que le ſeul dèrnier reſte du grade ſubſéquent, & en continuant la raiſon on formera, d'abord le prémier reſte d'un nouveau grade.

AVERTISSEMENT.

114 Mais je puis dans la proportion générante renvèrſer l'ordre des deux reſtes générants. Par exemple ſoit la proportion générante a : b : : a — pb : + ſpb + b, dans laquelle les reſtes générants ſont, ſelon l'ordre qu'ils ont dans le détail de la raiſon & laquelle me donne l'égalité générante — ſa² + ſpba + ba = ba — pb², & l'équation ſa² = pb² + ſpba. Je puis, dis-je, renvèrſer l'or-

Digitized by Google

dre des reſtes générants, & prendre pour proportion générante a : b :: — ſa + ſp b + b : a — p b, où le reſte générant, qui eſt le prémier dans le détail de la raiſon, ſe trouve moindre que le ſecond reſte générant, ſi bien que ſouſtrayant le prémier du ſecond pour continuër le détail de la raiſon, il ſe trouve que le reſte ſuivant eſt conſigné au ſecond reſte générant, & qu'ils continuë le grade.

I. Corollaire.

DU Corollaire & de l'avertiſſement précédent s'enſuit que les deux reſtes générants, ſont les deux reſtes, qui doivent continuër le détail de la raiſon d'a, à b, ils vont amener des grades pareils aux prémiers, que la raiſon a : b a déja amenez, & qui font un période, que ces nouveaux grades feront le ſecond période, lequel finira par deux reſtes, qui feront comme les générants en raiſon d'a, à b, & qu'inſi ce détail ſera une ſuite de périodes pareils en tout, qui ne finiront point. 115

II. Corollaire.

LEs préfix qu'ont a, & b dans les reſtes générants, ſont ceux que les puiſſances a^2, & b^2 ont dans l'équation, puiſque la multiplication par a & par b ne les change point. 116

III. Corollaire.

CHâque racine eſt affectée de ſignes contraires dans les deux reſtes générants, & les ſignes d'a, & b ſont contraires dans un même reſte générant. Donc les racines a, & b, dont l'une eſt un reſte générant, & l'autre dans l'autre reſte generant, ont un même ſigne ; donc le plan a b a le même ſigne dans l'un & dans l'autre membre de l'égalité générante. C'eſt pourquoi dans la réduction que forme l'équation, le plan a b a pour préfix la différence des préfix, qu'il a dans les deux membres de l'égalité générante, & ſi cette différence eſt le zero, le plan a b s'évanoüit, & ne paroit pas dans l'équation. 117

AVERTISSEMENT.

118 DAns tout ce qui a été dit cy-deſſus, il n'eſt point ſuppôſé que la raiſon b : a—bp, qui eſt celle du retranché b au prémier reſte, ſoit égale à la raiſon a : b, & que a : b : a—pb ſoit en raiſon continuë, mais on le peut ſuppôſer. Et ainſi la proportion étant a : b :: b : a — p b , les reſtes générants ſont b, & a—pb. Donc b^2 produit des tèrmes moyens $= a^2 - p\,b\,a$, produit des extremes, & cette égalité ſe réduit à cette équation $a^2 = b^2 + p\,b\,a$, qui eſt, comme on vèrra dans la ſuite, la plus ſimple formule d'une équation régulière du deuxiéme dégré.

Toutes ces véritez s'éclairciront davantage dans les hypothêſes, ou exemples en nombres.

I. PROBLEME.

119 COnſtruire l'équation régulière & périodique du ſecond dégré, dont le période ſoit preſcrit, c'eſt-à-dire que l'ordre des grades, qui feront le période ſoit preſcrit, & que le nombre des ſouſtractions de châque grade ſoit auſſi preſcrit.

1°. Il faut bâtir le période preſcrit. Par exemple ſoit le période de deux grades, dont le prémier ait deux ſouſtractions, & deuxiême trois, ainſi.

2°. Il faut que la colomne foible, c'eſt-à-dire celle, dont les préfix ſont les plus petits, ſoit * ſous la plus grande racine. 3°. Il faut ſuppôſer la proportion que j'ay appellée génerante, dont a : b ſoit la prémière raiſon (où je ſuppôſe a > b) & que la ſeconde ſoit entre les dèniers

* 57

a b	
+ 1 — 1	
+ 1 — 2	
+ 1 + 3	
— 2 + 5	
— 3 + 7	
reſte ajoûté + 4 — 9	

Digitized by Google

derniers reſtes des deux grades, que j'ai appellés les reſtes générants.

Ainſi $a : b :: +a - 2b : -3a + 7b$

Ou bien ainſi $a : b :: -3a + 7b : +a - 2b$

Au prémier cas on aura cette autre équation

$$ab - 2b^2 = -3a^2 + 7ab$$

$$3a^2 = 2b^2 + 6ab$$

Au ſecond cas on aura cette autre équation

$$-3ab + 7b^2 = a^2 - 2ab$$

qui ſe réduit à $7b^2 = a^2 + ab$

4°. Si l'on ſe détermine au prémier cas, il faut que le reſte $+a - 2b$ ſoit plus grand que le reſte $-3a + 7b$. Il faut ſuppôſer que le ſixiême reſte, que j'appelle, *reſte ajoûté*, dont les préfix doivent être 4 ſous a, & 9 ſous b, ait le ſigne + devant 4, & le ſigne — devant 9; ainſi $+4a - 9b$. Car cela ne pourra être, qu'on n'ait ſouſtrait le reſte $-3a + 7b$ du reſte $+a\ 2b$. De ſorte que le reſte $-4a + 7b$ ſera ſuppôſé plus grand que le reſte $4a - 76$; & en ce cas-là le deuxiême période qui commencera par le reſte $+4a - 9b$, ſera conſigne au prémier.

Mais dans le ſecond cas, où l'on ſuppôſe le ſixiême reſte, ainſi $-4a + 9b$, ce ne pourra être qu'en ſouſtrayant $a - 2b$ de $-3a + 7b$, & alors le reſte $1a - 2b$ ſera ſuppôſé plus petit que le reſte $-3a + 7b$; & le deuxiême période, qui commencera par ce reſte $-4a + 9b$, ſera diſſigne au prémier.

a	b	
$+1$	-1	
$+1$	-2	
-1	$+3$	
-2	$+5$	
-3	$+7$	
reſte ajoûté -4	$+9$	

1°. Il faut démontrer que l'équation $3a^2 = 2b^2 + 6ab$ eſt périodique. Elle eſt formée de cette proportion $a : b ::$

$a - 2b : -3a + 7b$; donc puiſque la raiſon de ces deux reſtes $a - 2b : -3a + 7b$, eſt égale à la raiſon $a : b$, il ſuit que les ſouſtractions de ces deux raiſons ſont pareilles, & que celles de la raiſon $a : b$ donnant d'abord (*conſtruct*) le période preſcrit de deux grades, 2, 3 ; auſſi les ſouſtractions, qui en continuant cette raiſon ſeront faites entre ces deux reſtes $a - 2b$, & $-3a + 7$ donneront d'abord le même période. Mais ces reſtes $a - 2b$, & $-3a + 7b$, doivent par leurs ſouſtractions donner le ſecond période de la raiſon demandée ; donc la raiſon demandée aura les deux prémiers périodes pareils ; donc les deux derniers reſtes des deux dégrez du ſecond période ſeront dans la raiſon $a : b$. Donc par leurs ſouſtractions ils feront un troiſiême période pareil aux deux prémiers, & ainſi à l'infini, lequel ſera conſigne au ſecond, comme le ſecond l'a été au prémier.

2°. On démontrera de même que la raiſon de l'équation $7b^2 = a^2 + ab$ fera tous ſes périodes pareils au prémier, mais dont le troiſiême ſera diſſigne au deuxiême, comme le deuxiême l'a été au prémier, & ainſi alternativement les périodes ſeront conſignes, mais toûjours deux périodes de ſuite ſeront diſſignes. Donc, &c. c. q. f. b.

AUTRE EXEMPLE,

Soit le période preſcrit de trois grades, dont le prémier & le troiſiême ſoient chacun d'une ſouſtraction, & que le deuxiême grade ſoit de deux, & qu'il faille trouver l'équation régulière du deuxiême dégré, qui ſoit périodique, & dont les périodes ſoient pareils au période preſcrit. Soit a ſuppôſé > b.

$+a - b$	
$-a + 2b$	
$-2a + 3b$	
$+3a - 4b$	

Digitized by Google

1°. Soit la proportion $a : b :: -2a+3b : 3a-4b$

Donc $-2ab+3b^2 = 3a^2-4ab$

ce qui eſt $3b^2+2ab = 3a^2$

Cette équation ſatisfera au problême, & le deuxiéme période ſera diſſigne au prémier.

2°. Soit la proportion $a : b :: 3a-4b : -2a+3b$

Donc $3ab-4b^2 = -2a^2+3ab$

Donc $2a^2 = 4b^2$, donc $a^2 = 2b^2$

Cette équation ſatisfera au problême, le deuxiême période ſera conſigne au prémier.

Les démonſtrations ſont ici pareilles à celles de l'exemple précédent.

II. PROBLÊME.

UNe équation régulière & ſourde du deuxiême dégré, dont les hautes puiſſances ne ſoient pas toutes deux dans le même membre de l'équation, étant donnée, démontrer qu'elle eſt périodique. 121

Soient trouvez les reſtes du détail de la raiſon de ſes deux racines juſqu'à ce que les préfix des deux puiſſances y paroiſſent. Ils y paroîtront, * & celui de la plus grande puiſſance paroîtra * dans la colomne foible. * 117 * 37

Et puiſque la raiſon eſt ſuppôſée ſourde, les préfix de ſes deux puiſſances paroîtront en deux reſtes différents, qui ſeront en deux grades différents, mais conſécutifs. Et pour ſçavoir lequel de ces deux reſtes ſera le plus fort, ſoit trouvé un reſte de plus, que j'ai appellé *le reſte ajoûté*; & celui de ces deux prémiers reſtes, qui ſe trouvera conſigne au reſte ajoûté, ſera le plus fort, & l'on aura une proportion, dont les termes ſeront, 1°. la plus grande racine a, 2°. la plus petite racine b, 3°. le plus grand des deux reſtes, où paroîtront les préfix des deux

Digitized by Google

puiſſances, 4°. le plus petit de ces deux reſtes. Puis le produit des extrêmes étant égal à celui des moyens, ce ſera l'équation propôſée.

EXEMPLE,

122 SOit l'équation propoſée $7b^2+8ab=3a^2$, dont a eſt la plus grande racine, & ſoient trouvez ſes reſtes juſqu'à faire paroître les préfix des puiſſances. Le préfix de b, qui eſt 7, paroîtra dans la plus forte colomne au cinquiême reſte, & le préfix d'a qui eſt 3, paroîtra dans la foible colomne au ſixiême reſte. Et parce que le cinquiême reſte ſe trouve conſigne au ſeptiême, qui eſt le reſte ajoûté, il s'enſuit qu'il eſt plus grand que le ſixiême reſte.

		a	b	
	3	−1	+1	15
	12	−2	+1	7+16
	27	−3	+1	7+24
	48	+4	−1	7+32
	147	+7	−2	28+112
	300	−10	+3	63+240
reſte ajoûté	867	+17	−5	175+680

Parce que le ſeptiême eſt le reſidu du ſixiême ſouſtrait du cinquiême, donc les quatre grandeurs proportionnelles ſont

$$a : b :: 7b-2a : -10b+3a$$

Car le produit des extrêmes $3a^2-10ab$, eſt égal à celui des moyennes $7b^2-2ab$, puiſque tranſportant $-10ab$ d'une part à l'autre, il y aura $3a^2$ d'une part, & $7b^2+8ab$ de l'autre, qui ſont les membres de l'équation propoſée. Donc (*hypoth.*) ils ſont égaux ; donc les quatre grandeurs $a:b::7b-2a:-10b+3a$, ſont proportionnelles ; & par un raiſonnement pareil à celui de la démonſtration du problême précédent, on démontrera

Digitized by Google

que l'équation propoſée $3a^2 = 7b^2 + 8ab$ eſt périodique, & que châcun de ſes périodes eſt de trois grades, dont le prémier a trois ſouſtractions, le deuxiême deux, & le troiſiême une ; & que le deuxiême période ſera diſſigne au prémier. Ce qui ſe peut vérifier autant qu'on voudra en continuant le détail.

AVERTISSEMENT.

QUand les deux prémiers périodes ſont diſſignes, ſi on les regarde comme compôſant un ſeul période, & le troiſiême & le quatriême comme compôſant un autre ſeul période, & le cinquiême & le ſixiême de même, & ainſi de ſuite tous ces périodes compôſez châcun de deux périodes diſſignes, ſeront conſignes entre eux.

AUTRE EXEMPLE.

SOit propôſée l'équation 123

$$a^2 + 3ab = 9b^2$$

	a	b	
4	−1	+1	9
4+6	+2	−1	9
9+18	−3	+2	36
25+45	−5	+3	81
49+84	−7	+4	144
81+135	−9	+5	225
reſte ajoûté 121+198	−11	+6	324

a > b, donc 9, qui eſt le préfix de b, ſera dans la plus forte colomne, qui eſt la prémière, & il eſt au quatriême reſte du troiſiême dégré. Et l'unité, qui eſt le préfix d'a, ſera dans la colomne foible ; & c'eſt dans le deuxiême reſte, qui ſeul fait le grade antérieur, & les reſtes

qui doivent entrer dans la proportion, ſont $2b-a$, & $-9b+5a$: & parce que le deuxiême reſte $2b-a$ eſt diſſigne au reſte ajoûté, qui eſt $-11b+6a$, il eſt plus petit que le ſixiême, & ainſi la proportion eſt
$a:b::-9b+5a:2b-a$, où le produit des extrêmes $2ab-a^2$ eſt égal à $-9b^2+5ab$ produit des moyens; car en tranſpoſant le terme $-9b^2$, & le terme $-a^2$ ſous ſignes contraires, & retranchant $2ab$ de part & d'autre, on forme l'équation propoſée $a^2+3ab=9b^2$, qu'il eſt aiſé de démontrer être périodique, & de trois grades, dont les deux prémiers ſont d'une ſouſtraction châcun, & le troiſiême de quatre, & que le deuxiême période eſt conſigne au prémier, ce qui ſe peut vérifier autant qu'on voudra en continuant le détail.

AUTRE EXEMPLE.

124 SOit l'équation propoſée $a^2+ab=3b^2$

	a	b	
2	−1	+1	3
6	+2	−1	3
9+6	+3	−2	12
reſte ajoûté 16+12	+4	−3	27

$a>b$, donc le préfix de b eſt dans la colomne forte, & c'eſt au deuxiême reſte du deuxiême grade, ſçavoir $3b-2a$, & l'unité préfix d'a, eſt dans la colomne foible, & dans $+a-b$, unique reſte du grade antérieur, qui eſt le prémier ; donc les deux reſtes, qui doivent être dans la proportion, ſont $+ab$, & $3b-2a$. Et parce que $+a-b$ eſt diſſigne au reſte ajoûté, qui eſt $-3a+4b$, le reſte $3b-2a$ eſt plus grand que $+a-b$, la proportion eſt donc

$$a:b::3b-2a:+a-b$$

où le produit des extrêmes $+a^2-ab=+3b^2-2ab$. Et tranſpôſant $-2ab$, il revient $a^2+ab=3b^2$ équa-

Digitized by Google

tion propôſée, dont le période eſt de deux grades, le prémier d'une ſouſtraction, & le deuxiême de deux; & le deuxiême période eſt diſſigne au prémier, & conſigne au ſecond, ce qui ſe vérifiera autant qu'on voudra en continuant le détail.

AUTRE EXEMPLE;

Soit l'équation propoſée $a^2 = 2b^2$

	a	b	
	1	—1	+1
	4	+2	—1
reſte ajoûté	9	+3	—2

$a > b$, & 2, le préfix de b, ſe montre au deuxiême reſte de la colomne forte, & l'unité préfix d'a dans la colomne foible au prémier reſte. Et parce que $-b+a$ eſt diſſigne au troiſiême reſte $+3b-2a$, il eſt plus petit que $+2b-a$, & la proportion eſt

$$a : b :: 2b-a : -b+2a$$

Donc $-ab+a^2 = 2b^2-ab$

Et ajoûtant $+ab$ par tout, il revient $a^2 = 2b^2$ équation propoſée.

Où l'on voit que le plan diſparoît, parce que l'unité eſt le préfix d'a dans l'un des reſtes, & de b dans l'autre, & ſous le même ſigne.

AUTRE EXEMPLE,

125 SOit l'équation $2a^2 = 5b^2$

	a	b	
	8^a	-1	$+1$	5
	8	$+2$	-1	5
	18	-3	$+2$	20
	50	$+5$	-3	45
reste ajoûté	128	$+8$	-5	125

$a > b$, le préfix d'a, ſe montre dans la colomne foible à l'unique reſte du troiſiême grade, & 5, le préfix de b, au prémier reſte du quatriême. Et parce que le reſte $-3b+2a$, eſt diſſigne au reſte ajoûté, qui eſt $8b-5a$, il eſt plus petit que le reſte $+5b-3a$. La proportion eſt donc

$$a : b :: +5b-3a : -3b+2a$$

Où a, & b ont dans les deux reſtes même préfix 3, avec même ſigne

Donc $-3ab+2a^2 = 5b^2-3ab$

Et ajoûtant par tout $3ab$, il revient $2a^2 = 5b^2$ équation propoſée.

I. AVERTISSEMENT.

126 LEs racines négatives donnent la même équation du deuxiême dégré que les racines poſitives.

Soit par exemple l'équation propôſée $a^2+ab=3b^2$; 124 qu'il a été démontré ci-deſſus, * avoir un période com-

pôſé

pôſé de deux grades, l'un d'une ſouſtraction, & l'autre de deux, & dans ſa proportion avoir le deuxiême reſte plus grand que le prémier.

Et ſoient bâtis par deux racines négatives —a, & —b deux grades, le prémier d'une ſouſtraction, & l'autre de deux; le reſte du prémier grade ſera —a+b, & le deuxiême reſte du ſecond grade ſera 2a—3b, & la proportion ſera

$$\begin{array}{r} -a \\ -b \\ \hline -a+b \\ \hline -b \\ -a+b \\ \hline a-2b \\ \hline a-2b \\ -a+b \\ \hline 2a-3b \end{array}$$

$$-a : -b :: 2a-3b : -2a+b$$

$$a^2 - ab = -2ab + 3b^2$$

Et en tranſpôſant $-2ab$

$$a^2 + ab = 3b^2$$ équation propoſée.

II. AVERTISSEMENT.

ET ſi l'on bâtit le période de deux racines, l'une poſitive, & l'autre négative —a & +b, ou —b, & +a, l'équation reviendra encore la même. Il faut ſe ſouvenir que les ſouſtractions ſe font par autant d'additions.

I 27

45

$$\begin{array}{r} -a \\ +b \\ \hline -a+b \\ \hline +b \\ -a+b \\ \hline -a+2b \\ \hline -a+2b \\ -a+b \\ \hline -2a+3b \end{array} \qquad \begin{array}{r} +a \\ -b \\ \hline +a-b \\ \hline -b \\ +a-b \\ \hline +a-2b \\ \hline +a-2b \\ +a-b \\ \hline +2a-3b \end{array}$$

$$-a : +b :: -2a+3b : -a+b \qquad +a : +b :: 2a-3b : a-b$$

$$a^2 - ab = -2ab + 3b^2 \qquad a^2 - ab = -2ab + 3b^2$$

$$a^2 + ab = 3b^2 \qquad a^2 + ab = 3b^2$$

Digitized by Google

Ie THE'OREME.

128 CHâque formule d'équation du deuxiême dégré, marque par ſes préfix le période de la raiſon de ſes racines, c'eſt-à-dire de combien de grades eſt ce période, & de combien de ſouſtractions châque grade.

Ainſi le formule $a^2 = b^2 + pab$ marque l'équation la plus ſimple, qui dans châque grade a autant de ſouſtractions, que le préfix p du plan ab. a d'unités. Si $p = 1$, l'équation ſera $a^2 = b^2 + ab$, & les racines a, & b ſeront entre elles ſelon la moyenne & extrême raiſon, où châque grade n'a qu'une ſouſtraction. Si $p = 2$, la raiſon a:b aura deux ſouſtraction à châque grade. Mais parce qu'en tous ces cas le deuxiême dégré ſera néceſſairement diſſigne au prémier, & que les dégrez alternatifs ſeront conſignes, il s'enſuit que ſi des deux périodes conſécutifs, & diſſignes, on n'en fait qu'un, ces nouveaux périodes ſeront conſignes, & de deux grades d'autant de ſouſtractions l'un que l'autre.

EXEMPLE,

129 SOit propoſée l'équation $a^2 = b^2 + 2ab$

	a	b	
1	−1	+1	3
4	−2	+1	1+4
9	+3	−1	1+6
25	+5	−2	4+20
49	−7	+3	9+42

Les quatre prémières ſouſtractions font le prémier période compôſé de deux périodes diſſignes de deux ſouſtractions châcun. La cinquiême ſouſtraction commence un période conſigne au prémier ; donc toutes les fois que les puiſſances n'ont que l'unité pour préfix,

Digitized by Google

l'équation eſt ſourde, & la raiſon de ſes racines n'a dans châque période qu'un grade d'autant de ſouſtractions, que le préfix du plan a b a d'unités.

Pour avoir les équations du deuxiême dégré, dont le période ait deux grades, je prends les deux racines a, & b, & le prémier, & le deuxiême reſtes de la table générale, & fais ainſi ma proportion $a:b::a-pb:-fa+fpb+b$, qui me donne le formule de l'équation $pb^2+fpba=fa^2$, où l'on voit que le préfix de b^2, marqué par p, a autant d'unités, que le prémier grade a de ſouſtractions, & que le préfix d'a, marqué par f, a autant d'unités, que le ſecond grade a de ſouſtractions, & que le plan ab a pour préfix fp, qui eſt le produit des préfix des deux puiſſances, & que le plan ab eſt attaché à la plus foible puiſſance, qui eſt b^2.

EXEMPLE,

EQuation $2a^2=3b^2+6ab$ 130

	a	b	
2	−1	+1	3+6
8	−2	+1	3+12
18	−3	+1	3+18
32	+4	−1	3+24
98	+7	−2	12+84
200	−10	+3	27+180

Le préfix du plan ab eſt 6, produit des préfix 2, & 3, des puiſſances a^2, & b^2, & cela ſuffit pour aſſurer que la raiſon eſt ſourde, & de deux grades dans châque période, dont celui qui eſt attaché au plan ab, a pour préfix la plus grande des deux aliquotes 2, & 3 du préfix du plan ab.

AVERTISSEMENT.

131 SI je prends les mêmes quatre proportionnels, & que je change l'ordre des deux derniers, ainſi a : b :: — ſa + ſpb : a — b ; les produits des deux moyens, & les deux extrêmes me donneront encore un formule d'une équation, dont le période ſera des deux mêmes grades, mais qui ſera ſuivi d'un période diſſigne.

Proportion a : b :: — ſa + ſpb + b : a — pb
Egalité $a^2 - pab = -sab + spb^2 + b^2$
Equation $a^2 + sab = spb^2 + b + pab$

Où l'on voit que l'un des quarrez a^2 n'a que l'unité pour préfix, que le plan ab des racines a pour prefix ſ du côté de a^2, & p du côté de b^2, & par conſéquent que ſi p, & ſ ſont égaux, le plan diſparoît dans l'équation, & que s'ils ſont inegaux, leur différence demeure préfix du plan ab du coté d'a^2, ſi ſ > p, ou du côté de b^2, ſi p > ſ, & que b^2 a pour préfix le produit de p, & d'ſ, plus l'unité.

132 EXEMPLE;

$a^2 = 7b^2 + ab$

	a	b	
1	— 1	+ 1	7 + 1
4	— 2	+ 1	7 + 2
9	— 3	+ 1	7 + 3
16	+ 4	— 1	7 + 4
49	+ 7	— 2	28 + 14
100	+ 10	— 3	63 + 30
169	+ 13	— 4	112 + 52
256	+ 16	— 5	175 + 80
361	— 19	+ 6	252 + 114
1225	— 35	+ 11	347 + 385

Le préfix de b^2 eſt 7, ôtez-en l'unité, reſte 6, dont

Digitized by Google

les aliquotes ſont 3, & 2; la différence de 3, & de 2 eſt l'unité, qui eſt le préfix du plan ab; d'où il s'enſuit que 3 doit être ſon préfix naturel, & que 2 doit être le préfix du même plan ab du côté d'a^2, & que $p=3$, & $f=2$, & qu'ainſi le prémier grade de cette équation a trois ſouſtractions, & que le deuxiême en a deux, ce qui fait le prémier période, & que le deuxiême période eſt diſſigne au prémier, & que les deux enſemble n'en faiſant qu'un, ce période total ſera de trois grades, dont le prémier ſera de trois ſouſtractions, le deuxiême de cinq, & le troiſiême de deux, & que tous les périodes qui ſuivront celui-là, lui ſeront conſignes; d'où il ſuit que la raiſon d'a à b aura d'abord un grade de trois ſouſtractions, & une ſuite infinie de grades conſignes alternativement l'un à l'autre, mais châcun de cinq ſouſtractions.

I. AVERTISSEMENT.

LA ſuite de ces formules ſeroit toûjours accompagnée d'un plus grand nombre d'obſervations. Je ne m'y arrêterai pas davantage. 133

II. AVERTISSEMENT.

J'Ai dit ci-deſſus * que les coëfficiants des deux hautes puiſſances d'une équation du deuxiême dégré, paroiſſent dans le détail de la raiſon de leurs racines. Cela ſouffre une exception que j'ai remis à expliquer en cet endroit. 134

II. THEOREME.

LE tèrme a d'un reſte quelconque n'eſt jamais exactement multiple du tèrme a pris dans un reſte antérieur. Et il en eſt de même du terme b. 135

Car 1°. ces reſtes ne peuvent être d'un même grade, parce que dans un même grade châque reſte eſt un multiple du dèrnier reſte du grade précédent, ajoûté

au dèrnier reſte du grade antéprécédent, c'eſt-à-dire, qui précéde le précédent, & par conſéquent les tèrmes d'un même reſte ſont équimultiples des tèrmes du dèrnier reſte du grade précédent ajoûtés aux tèrmes d'un dèrnier reſte du grade antéprécédent. 2°. Ces reſtes ne peuvent être en grades différents, car les reſtes de deux grades différents ne ſont équimultiples d'aucun reſte d'un grade antérieur à ces deux grades différents, ce qui conclud en même temps pour leurs tèrmes.

CONSE'QUENCE.

136 DE là s'enſuit que ſi les équimultiples des tèrmes a, & b ſe trouvent l'un en un reſte d'un grade, & l'autre en un reſte d'un autre grade, les tèrmes a, & b ſimples, ou ſousmultipliés, ne paroîtront pas tous deux dans le détail de la raiſon, parce qu'il y auroit deux tèrmes d'a, & deux tèrmes de b exactement multiples des tèrmes a, & b ſimples. Je dis qu'ils ne paroîtront pas tous les deux; car ſi dans l'équation l'un des tèrmes a, ou b n'a que l'unité pour préfix, tout autre tèrme a, ou b ſera ſon multiple.

CONSE'QUENCE.

137 SI dans la conſtruction d'une équation, au lieu des tèrmes ſimples a, & b je prends leurs équimultiples, & que la raiſon de cette équation ſe trouve ſourde, les équimultiples d'a, & de b paroîtront dans le détail. Et ſi le plan ab eſt équimultiple aux équimultiples d'a, & de b, l'équation diviſée pour leur commune meſure, ſera réduite à de moindres tèrmes: mais comme la raiſon des racines ſera toûjours la même, ſi l'on opère

Digitized by Google

ſur cette équation réduite, les racines réduites ne paroîtront point, mais leurs équimultiples.

Equation $a^2+3ab=6b^2$

	a	b	
1+3	−1	+1	6
4+6	+2	−1	6
9+18	+3	−2	24
16+36	−4	+3	54
49+105	+7	−5	150
121+264	+11	−8	384
225+495	−15	+11	726
676+1482	−26	+19	2166
1396+2977	−37	+27	4374
2304+5040	−48	+37	7350
reſte ajoûté 3431+9881	−59	+43	11004

a > b, & 6, le préfix de b, ne paroît pas dans la colomne forte: mais 48 octuple de 6 s'y montre au quatriême reſte du cinquiême grade; & 8 octuple de l'unité, qui eſt le préfix d'a, eſt dans la colomne foible au dernier reſte du quatriême grade. Et parce que ce reſte, qui eſt 11b−8a, eſt diſſigne au reſte ajoûté −59b+43a, il eſt plus petit que le reſte −48b+35a. La proportion eſt donc

$$a:b::-48b+35a:11b-8a$$

Donc $11ab-8a^2=-48b^2+35ab$

Donc $48b^2=8a^2+24ab$

Et diviſant tout par 8

$a^2+3ab=6b^2$ équation propôſée.

AUTRE EXEMPLE.

138 SOit propoſée l'équation $a^2 = b^2 + 2ab$

		a	b	
	1	−1	+1	3
	4	−2	+1	1+4
	9	+3	−1	1+6
	25	+5	−2	4+20
reſte ajoûté	49	−7	+3	9+42

Donc $a > b$, donc l'unité préfix d'a doit être dans la foible colomne, & elle ne peut être au deuxiême reſte, parce que l'unité préfix de b ne ſe trouvant qu'au prémier reſte, ne peut valoir, à cauſe que ces deux prémiers reſtes étant d'un même grade, les deux préfix des puiſſances ne s'y peuvent trouver. Il faut donc chèrcher un multiple de deux préfix 1, & 1, & le binaire ſe préſente d'abord, il eſt pour a dans le deuxiême reſte du deuxiême grade, & pour b dans le deuxiême reſte du prémier grade, & les reſtes ſont $-2b+a$, & $5b-2a$; & parce que $-2b+a$ eſt conſigne au reſte ajoûté, qui eſt $-7b+3a^1$, c'eſt une preuve que $-2b+a > 5b-2a$. La proportion ſera donc.

$$a : b :: -2b+a : 5b-2a$$

Car le produit des extrêmes $5ab - 2a^2$ ſera égal au produit des moyens $-2b^2+ab$, puiſqu'ôtant ab de partout, & tranſpôſant $-2a^2$, & $-2b^2$, il y aura $2b^2+4ab = 2a^2$; & diviſant les préfix par 2, il en revient $a^2 = b^2+2ab$, qui eſt l'équation propôſée, dont le période eſt de deux grades de deux ſouſtractions châcune, & le deuxiême période eſt conſigne au prémier, ce qui peut ſe vérifier autant qu'on voudra continuer le détail.

AUTRE

AUTRE EXEMPLE,

SOit l'équation $2a^3 = 2b^3 + ab$ 139

	a	b	
2	—1	+1	3
8	+2	—1	4
18	+3	—2	8+6
32	+4	—3	18+12
50	—5	+4	32+20
reſte ajoûté 162	+9	—7	98+63

$a > b$, donc 2, le préfix d'a doit être dans la foible colomne, il s'y trouve au troiſiême reſte, mais il ne convient pas, parce que 2, le préfix de b, qui ſe trouve au deuxiême reſte, ſeroit dans le même grade; il faut donc aller aux équimultiples, qui ſont 4 au cinquiême reſte pour le préfix d'a, & 4 au quatriême reſte pour le préfix de b, & les deux reſtes qui entreront dans la proportion, ſeront $+4b-3a$, & $-5b+4a$; & parce que $4b-3a$ eſt conſigne au reſte ajoûté, qui eſt $9b-7a$, c'eſt une preuve que $4b-3a > -5b+4a$. La proportion ſera donc

$$a : b :: 4b-3a : -5b+4a$$

Car le produit des extrêmes ſera $-5ab+4a^2$, & celui des moyens ſera $4b^2-3ab$. Or ces deux produits ſeront égaux, puiſque tranſpôſant $-5ab$, il y aura $4a^2$ d'une part, & $4b^2+2ab$ de l'autre; & diviſant tous les préfix par 2, il y aura

$$2a^2 = 2b^2 + ab$$

qui eſt l'équation propôſée, dont le période eſt de trois grades, le prémier & le troiſiême d'une ſouſtraction châcun, & le deuxiême de trois ſouſtractions, & le deuxiême période eſt diſſigne au prémier.

AUTRE EXEMPLE,

140 Soit l'équation $3a^2 = 7b^2$

	a	b	
3	—1	+1	7
12	+2	—1	7
27	—3	+2	28
75	+5	—3	63
192	+8	—5	175
363	+11	—7	343
588	+14	—9	567
867	+17	—11	847
1200	+20	—13	1183
1587	+23	—15	1575
2028	+26	—17	2023
2523	—29	+19	2527
9075	+55	—36	9072
21168	—84	+55	21175
reſte ajoûté 57963	—139	+99	57967

a > b, 3 le multiple d'a, ne ſe trouve dans la colomne foible qu'au quatriême reſte qui n'eſt pas le dernier de ſon grade. Il faut donc aller aux équimultiples de 3, & & de 7. Or 36 dodécuple de 3, ſe montre à l'unique reſte du ſixiême grade, & 84 prefix de b, & dodécuple de 7, ſe montre au grade ſuivant ; & a, & b ont en ces deux reſtes le même préfix 55 avec le même ſigne : & parce que le reſte $55b - 36a$ eſt diſſigne au reſte ajoûté, il eſt plus petit que $-84b + 55a$. La proportion eſt donc

$$a : b :: -84b + 55a : 55b - 36a$$

Donc $55ab - 36a^2 = -84b^2 + 55ab$

Donc $-36a^2 = 84b^2$

Donc $3a^2 = 7b^2$

Digitized by Google

CONSE'QUENCE.

DÂns les raiſons ſourdes du deuxiême dégré, les préfix des puiſſances, ou les équimultiples de leurs préfix, paroiſſent dans le détail de la raiſon de leurs racines ; mais ils ne paroiſſent pas toûjours dans les deux reſtes générants, qui continuent le détail de la raiſon. 141

III. PROBLÊME.

SOit donné le détail d'une raiſon quelconque a:b juſqu'à tel reſte qu'on voudra, & qu'il faille conſtruire toutes les équations qui peuvent amener ce détail juſqu'au reſte donné. 142

Pour le faire, il faut prendre ce dèrnier reſte, & tel autre reſte qu'on voudra de ceux qui précédent ce dèrnier, & ſuppôſer ces deux reſtes être en raiſon a:b, il y aura cette proportion a:b:: un reſte : l'autre reſte. Soient multipliés les extrêmes enſemble, & les moyens enſemble, il y aura égalité ; & tranſpôſant les tèrmes négatifs d'un membre de l'égalité à l'autre, ce ſera une équation, dont tous les tèrmes ſeront affirmatifs.

J'ai déja dit * que cette ſuppôſition n'eſt pas vaine, & que quand je mêts cette proportion a:b:: un reſte : un autre reſte, & que je concluds que le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens, je fais ce que je ſuppôſe. Je fixe la valeur d'a:b ſur ce pied-là, c'eſt-à-dire ſur la valeur qui rend l'équation vraye : ſoit que cette valeur ſoit ſourde, ou de nombre à nombre. D'ailleurs la raiſon a:b fixée par ces deux reſtes, ne peut avoir d'autre détail, que celui qui contient ces deux reſtes. Donc j'ai conſtruit une équation, &c. * 113

c. q. f. d.

EXEMPLE,

1°. JE ſuppôſe toûjours a > b, ce qui eſt arbitraire.

2°. Les nombres ſous a deviennent dans l'équation * les prefix de b ; & les nombres ſous b, deviennent les préfix d'a.

* 32

a	b
— 1	+ 1
— 2	+ 1
+ 3	— 1
— 5	+ 2
— 8	+ 3

Je puis donner quatre équations, parce que je puis faire quatre proportions, dont les deux prémiers tèrmes ſeront a : b, & le troiſiême tèrme pourra être châcun de quatre autres reſtes, & le quatriême tèrme ſera le dèrnier reſte, en quoi je ſuppoſe que le dèrnier reſte — 8 b + 3 a eſt < qu'aucun des précédents ; car autrement il n'y auroit pas de proportion, d'autant que b < a, où il eſt évident que — 8 b + 3 a eſt le reſte de la ſouſtraction, dans laquelle — 5 b + 2 a, eſt le tout, + 3 b — a eſt le retranché. Or le reſte d'une ſouſtraction eſt < que le tout de cette ſouſtraction ; donc — 8 b + 3 a < 5 b + 2 a. 2°. — 8 b + 3 a peut être > ou < + 3 b — a, ce ſont les deux reſtes qui contiennent le détail de cette raiſon. 3°. — b + 3 a étant le dèrnier reſte de ſon grade, eſt * < — 2 b + a dèrnier reſte du grade antérieur. 4°. — 8 b + 3 a ſera < que — a + b, * puiſque c'eſt un tout poſtérieur au reſte — a + b, qui eſt le tout de la ſeconde ſouſtraction.

* 21
* 18

Soit 1°. a : b :: — 5 b + 2 a : — 8 b + 3 a

$$-8ab+3a^2 = -5b^2+2ab$$

$$3a^2+5b^2 = 10ab$$

	a	b	
3 + 5	— 1	+ 1	10
12 + 5	— 2	+ 1	20
27 + 5	+ 3	— 1	30
75 + 20	— 5	+ 2	100
192 + 45	— 8	+ 3	240

Soit 2°. $a:b::+3b-a:-8b+3a$

$$-8ab+3a^2=3b^2-ab$$

$$3a^2=3b^2+7ab$$

$$3a^2=3b^2+7ab$$

	a	b	
3	−1	+1	3+7
12	−2	+1	3+14
27	+3	−1	3+21
75	−5	+2	12+70
192	−8	+3	27+168=195

Soit 3°. $a:b::-2b+a:-8b+3a$

$$-8ab+3a^2=-2b^2+ab$$

$$3a^2+2b^2=9ab$$

	a	b	
3+1	−1	+1	9
12+2	−2	+1	18
27+2	+3	1	27
75+8	−5	2	100
192+18	−8	3	216

Soit 4°. $a:b::-b+a:-8b+3a$

$$-ab+3a^2=-b^2+ab$$

$$3a^2+b^2=9ab$$

	a	b	
3+1	−1	+1	9
12+1	−2	+1	18
27+1	+3	−1	27
75+4	−5	+2	100
192+9	−8	+3	286

I. AVERTISSEMENT.

143. 1. OU l'on voit que les préfix du plan dans l'équation eſt le prefix de b dans le dernier reſte générant +, ou — le préfix d'a dans le prémier reſte génerant de l'équation, ſelon que le préfix d'a eſt affecte de + ou de —. Ainſi dans la prémière figure, ou dans le prémier reſte générant il y a + 2a, le préfix d'ab dans l'équation eſt 10, qui eſt 8 + 2, c'eſt-à-dire le préfiz d'a dans le prémier reſte générant ajoûté au préfix de b dans le deuxiême reſte générant.

2. Au contraire dans la deuxiême figure, ou dans le prémier reſte de la proportion, il y a —a; le préfix du plan ab dans l'équation eſt 7, c'eſt à-dire 8 — 1. Le préfix de b dans le deuxiême reſte générant moins le préfix d'a dans le prémier reſte générant.

3. Dans la troiſiême & dans la quatriême figures, il y a +a dans le prémier reſte générant; & le préfix du plan ab dans l'équation, eſt 9, c'eſt-à dire 8 + 1.

Le 8 — 1 de la deuxiême figure a été déja démontré, & il eſt aiſé de démontrer par la même voye le préfix du plan ab dans les trois autres figures.

II. AVERTISSEMENT.

144 EN renvèrſant l'ordre des reſtes dans la proportion en cette ſorte a:b::—8b + 3a: un autre. Il faut que le dèrnier reſte —8b + 3a ſoit > que l'un des quatre autres reſtes. Or le reſte —8b + 3a ne peut être > que —5b + 2a, ni > que —2b + 1a, ni que —b + a. Mais il peut être plus grand & plus petit que le reſte + 3b — 1a, qui eſt le reſte, qui avec le reſte —8b + 3a, doit continuer la raiſon a:b.

I. COROLLAIRE.

145 DE ce Problême il ſuit, qu'autant qu'on a de ſouſtractions du détail d'une raiſon, autant on peut avoir d'équations, qui les amenent; & que dans une raiſon

Digitized by Google

ſourde y ayant une infinité de ſouſtractions poſſibles, il y a une infinité d'équations poſſibles, qui peuvent amener ce même détail, c'eſt-à-dire qu'il peut y avoir une infinité d'équations ſourdes, qui auront un même détail infini, comme on a vû qu'une ſeule équation peut amener infinies réſolutions.

II. Corollaire.

IL a été dit * que dans les équations homogénes du deuxiême dégré, dont les hautes puiſſances ſont, l'une dans un membre de l'équation, & l'autre dans l'autre, le préfix du plan eſt la différence de deux aliquotes réciproques du produit des préfix des deux hautes puiſſances, augmenté ou diminué de l'unité, & maintenant je dis que 146 * 118

Toutes les fois que les hautes puiſſances ſont d'un même côté dans l'équation, le plan a pour préfix la ſomme des deux aliquotes réciproques du produit des préfix des puiſſances, augmenté ou diminué de l'unité.

Mais cela n'eſt vrai que lorſque les reſtes qui ſont dans la proportion générante, ſont ou dans un même grade, ou que le prémier d'entre eux dans le détail, eſt le dèrnier reſte de ſon grade. Au prémier cas, les deux hautes puiſſances ſont dans un même membre de l'équation: au deuxiême cas elles ſont, l'une dans un membre de l'équation, & l'autre dans l'autre; & ce ſont les deux reſtes, qui contiennent la raiſon des racines de l'équation.

III. Avertissement.

HOrs de ces deux cas, & lorſque les deux reſtes générants ſont pris dans des grades non conſécutifs, il arrive que le plan dans l'équation a pour préfix deux aliquotes du produit des préfix des puiſſances, augmenté ou diminué d'un nombre plus grand que l'unité, ou de l'unité, ſelon la diſtance des grades, où ſont les reſtes générants. 147

EXEMPLE,

SOit l'équation $3a^2 = 4b^2 + 9ba$; le produit des préfix des puiſſances eſt 12, & 12 + ou — 1, eſt 13 ou 11, qui ne peuvent être produits que par 13, & 1, dont la différence eſt 12, ou par 11, & 1, dont la différence eſt 10. Mais ſi l'on diminuë de deux le produit 12, il reſtera 10 qui peut être produit par 10 & 1, dont la difference eſt 9 préfix du plan ab dans l'équation. Ainſi

Equation $3a^2 = 4b^2 + 9ab$

a	b		
3	—1	+1	4+9
12	—2	+1	4+18
27	—3	+1	4+27
48	+4	—1	4+36
147	+7	—2	16+126
300.	—10	+3	36+270

Proportion $a : b :: 4b - a : -10b + 3a$

Egalité $-10ab + 3a^2 = 4b^2 - ba$

Equation $3a^2 = 4b^2 + 9ab$

Où l'on voit que les reſtes générants ſont à la vérité en deux grades conſécutifs, mais que le prémier reſte générant n'eſt pas le dèrnier reſte de ſon grade.

III. THEOREME.

148 LEs équations homogénes du deuxiême dégré, dont les deux hautes puiſſances ſont dans un même membre de l'equation, ne ſont pas périodiques.

Ces équations ne ſe forment que par une proportion générante, dont les reſtes générants ſont conſignes, ſoient-ils d'un même grade, ou de deux grades differents,

Digitized by Google

différents, mais consignes, lesquels restes ne peuvent continüer la raison. Mais dès la prémière soustraction, les puissances se séparant, la raison devient périodique.

EXEMPLE,

SOit l'équation $3a^3+5b^2=10ab$

$a>b$ $b+c=a$

$5b^3+3b^2+6bc+3c^2=10b+10bc$

$3c^2=2b^2+4bc$. Equation périodique.

ARTICLE VI.

SECTION TROISIEME

DE LA REDUCTION des Equations.

LEMME. PROBLEME IV.

Donner deux manieres d'élever une équation à un degré supérieur. Soit par exemple l'équation $a^2=b^2+2ab$, *qu'il faille élever au troisième degré.* 149

EQuation $a^2=b^2+2ab$

Je la multiplie par a $a^3=ab^2+2a^2b$

par b $ba^2=b^3+2ab^2$

donc $b^3=ba^2-2ab^2$

Maintenant pour élever l'équation propôsée à une cubique, dont les deux hautes puissances soient dans un même membre de l'équation, je mets les deux puissances a^3+b^3 d'une part, & leurs valeurs de l'autre part ainsi :

$$a^3+b^3=3a^2b-ab^2$$

Et pour l'élever à une équation, où les deux hautes puiſſances ſoient ſéparées, j'ajoûte en croix à la puiſſance a^3, la valeur de b^3, & à la puiſſance b^3, la valeur d'a^3.

$a^3 + b a^2 - 2 a b^2 = b^3 + a b^2 + 2 a^2 b$, ce qui ſe réduit à $a^3 = b^3 + 3 a b^2 + a^2 b$, & l'équation donnée eſt élevée en deux façons ; car il eſt évident qu'en l'une & en l'autre de ces deux équations, la raiſon des racines $a : b$ eſt la même.

AVERTISSEMENT.

150 ON peut auſſi élever en donnant des abſolus aux multiplians, a, & b, comme l'on vèrra par les éxemples que j'en donnerai.

THEORÉME IV.

TOute équation régulière qui excédera le deuxiême degré. & qui dans ſon détail amenera les préfix de ſes hautes puiſſances en deux reſtes de deux grades différents & conſécutifs, dont le prémier ſoit le dèrnier, où l'unique reſte de ſon grade pourra être baiſſé à l'équation du deuxiême degré, dont ces deux reſtes amenés par l'équation propôſée, ſeront les reſtes généRants.

PRE'MIER EXEMPLE,

151 SOit l'équation cubiquê

$$3a^3 = 2b^3 + 6ab^2 + a^2b$$

J'en fais le détail

	a	b	
3	−1	+1	2+6+1
24	+2	−1	2+12+4
81	−3	+2	16+72+18
375	−5	+3	54+270+75
	+7	−4	

Les préfix ſont découvèrts, celui d'a eſt ſous b, &

Digitized by Google

celui de b ſous a. Les reſtes générants ſont $2b-a$, & $-5b+3a$, & ce prémier des deux eſt l'unique reſte de ſon grade, & le deuxiême eſt du grade ſubſéquent. D'ailleurs le cinquiême reſte conſigne au deuxiême, me faiſant voir que $+2b-a > -5b+3a$, je forme ainſi la proportion générante $a:b::2b-a:-5b+3a$, qui fait l'égalité $3a^2-5ab=2b^2-ab$, ce qui ſe réduit à l'équation $3a^2=2b^2+4ab$.

A laquelle la cubique eſt baiſſée. Elle en amene le détail, & étant élevée au troiſiême degré, elle forme l'équation cubique propôſée.

Le détail eſt

$$3a^2=2b^2+4ab$$

	a	b	
3	~~—1~~	+1	2+4
12	+2	—1	2+8
27	—3	+3	8+24
75	—5	+3	18+60

Pour élever l'équation $3a^2=2b^2+4ab$

Je la multiplie par a $\quad 3a^3=2ab^2+4a^2b$

par b $\quad 3ba^2=2b^3+4ab^2$

$$2b^3=3ba^2-4ab^2$$

J'ajoûte en croix à $3a^3$ la valeur de $2b^3$, & à ab^2 la valeur de $3a^3$ ainſi : $3a^3+3ba^2-4ab^2=2b^3+2ab^2+4a^2b$, ce qui ſe réduit à $3a^3=2b^3+6ab^2+a^2b$ équation cubique propôſée.

DEUXIÉME EXEMPLE,

SOit l'équation cubique $a^3=b^3+3ab^2+a^2b$, qu'il faille baiſſer au troiſiême degré. J'en fais le détail 152

jusqu'à la découvèrte des préfix de ses hautes puissances.

$a^3 = b^3 + 3ab^2 + a^2b$

	a	b	
1	−1	+1	4
8	−2	+1	1+6+4
27	+3	−1	1+9+9
125	+5	−2	8+60+50
343	−7	+3	27+189+147

Les préfix 1, & 1 paroissent dans les deux prémiers restes, mais ils sont d'un même grade, & non de deux grades différents, & leurs équimultiples 2, & 2 paroissent dans les deuxiême & quatriême restes, dont le prémier est le dèrnier reste du prémier grade, & le deuxième est dans le grade suivant. Le cinquième reste consigne au deuxiême, fait voir, que le deuxiême est 5^{-} que le quatriême. Je bâtis ma proportion générante de ces deux restes $a:b::-2b+a:+5b-2a:$. L'égalité est $-2a^2+5ab=-2b^2+ab$, ce qui se réduit à l'équation $2a^2=2b^2+4ab$, à laquelle l'équation se réduit à $a^2=b^2+2ab$, qui amene le même détail, & étant élevée au troisiême degré, formera l'équation cubique propôsée.

TROISIEME EXEMPLE.

153 EQuation $3a^3+5a^2b=10b^3+13ab^2$

Détail	a	b	
3+5	−1	+1	10+13
24+20	+2	−1	10+26
81+90	−3	+2	80+156
375+375	−5	+3	270+585
1029+980	−7	+4	640+1456

Les préfix des hautes puissances paroissent au deu-

Digitized by Google

xiême & au quatriême reſtes. Celui de $3a^3$ paroît purement au quatriême. Celui de $10b^3$ paroît au deuxiême, mais par ſon aliquote $2b^3$. Et parce qu'au cinquiême reſte, le côté d'a eſt plus foible, c'eſt ſigne que le deuxiême reſte $2b-a$ eſt plus petit que le quatriême $-5b+3a$. Je fais donc ainſi ma proportion générante.

$a : b :: -5b+3a : +2b-a$. Ce qui fait l'égalité $-a^2+2ab=-5b^2+3ab$. Et l'équation $a^2+ab=5b^2$, laquelle amene le détail ci-deſſus; & étant élevée par la multiplication de $3a$, & de $2b$, produit l'équation cubique propôſée, ainſi

$$a^3+ab=5b^2$$

Je multiplie par $3a$.	$3a^3+3a^2b=15ab^2$
par $2b$.	$2ba^2+2ab^2=10b^3$
Réduction	$3a^3=15ab^2-3a^2b$
Addition en croix	$3a^3+2ba^2+2ab^2=10b^3+15ab^2-3a^2b$
	$3a^3+5a^2b+13ab^2$

Le détail en eſt pareil à celui de l'équation propôſée.

$a^3+ab=5b^2$

	a	b	
2	-1	$+1$	5
$4+2$	$+2$	-1	5
$9+6$	-3	$+2$	20
$25+15$	-5	$+3$	45
$49+28$	-7	$+4$	80

Digitized by Google

QUATRIÈME EXEMPLE.

154 SOit l'équation du ſixième degré $3a^6+8ba^5=2b^6+12ab^5+25a^2b^4+20a^3b^3$, qu'il faille réduire à une équation du deuxième. J'en fais le détail juſqu'à la découverte de ſes racines.

$$3a^6+8ba^5=2b^6+12ab^5+25a^2b^4+20a^3b^3$$

	a	b	
3+8	−1	+1	2+12+28+20
192+466	+2	−1	2+24+100+80
2187+3888	−3	+2	128+1152+3600+4280
46875+25000	−5	+3	1458+1458+212625+, &c.
	+7	−4	

Les racines ſe montrent au deuxième & au quatrième reſtes; & le cinquième étant conſigne au deuxième, fait voir que le deuxième reſte eſt > que le quatrième. Je bâtis donc ainſi ma proportion générante $a:b::+2b-a:-5b+3a$, & par la multiplication des extrêmes & des moyens, j'ai cette égalité $2b^2-ba=-5ab+3a^2$, & tranſpôſant $-5ab$, l'équation eſt $3a^2=2b^2+4ab$, à laquelle la cubique propôſée eſt réduite, & dont le détail eſt celui de la raiſon propôſée.

$$3a^2=2b^2+4ab$$

	a	b	
3	−1	+1	2+4
12	+2	−1	2+8
27	−3	+2	4+24
75	−5	+3	18+60
147	+7	−4	32+112

Digitized by Google

Et en élevant l'équation $3a^2 = 2b^2 + 4ab$ juſqu'au ſixiême degré, on formera l'équation propôſée :

$$3a^2 = 2b^2 + 4ab$$

Je multiplie par a $3a^3 = 2ab^2 + 4a^2b$

par b $3ba^2 = 2b^3 + 4ab^2$

Réduction $2b^3 = 3ba^2 - 4ab^2$

Addition en croix $3a^3 + 3ba^2 - 4ab^2 = 2b^3 + 2ab^2 + 4a^2b$

Réduction $3a^3 = 2b^3 + 6ab^2 + a^2b$

par a $3a^4 = 2ab^3 + 6a^2b^2 + a^3b$

par b $3ba^3 = 2b^4 + 6ab^3 + a^2b^2$

Réduction $2b^4 = 3ba^3 - 6ab^3 - a^2b^2$

Addition en croix $3a^4 + 3ba^3 - 6ab^3 - a^2b^2 = 2b^4 + 2ab^3 + 6a^2b^2 + a^3b$

Réduction $3a^4 + 2ba^3 = 2b^4 + 8ab^3 + 7a^2b^2$

par a $3a^5 + 2ba^4 = 2ab^4 + 8a^2b^3 + 7a^3b^2$

par b $3ba^4 + 2b^2a^3 = 2b^5 + 8ab^4 + 7a^2b^3$

Réduction $2b^5 = +3ba^4 + 2b^2a^3 - 8ab^4 - 7a^2b^3$

Addition en croix $3a^5 + 5ba^4 + 2b^2a^3 - 8ab^4 - 7a^2b^3 = 2b^5 + 2ab^4 + 8a^2b^3 + 7a^3b^2$

Réduction $3a^5 + 5ba^4 = 2b^5 + 10ab^4 + 15a^2b^3 + 5a^3b^2$

par a $3a^6 + 5ba^5 = 2ab^5 + 10a^2b^4 + 15a^3b^3 + 5a^4b^2$

par b $3ba^5 + 5b^2a^4 = 2b^6 + 10ab^5 - 15a^2b^4 + 5a^3b^3$

Réduction $2b^6 = 3ba^5 + 5b^2a^4 - 10ab^5 - 15a^2b^4 - 5a^3b^3$

Addition en croix $3a^6 + 8ba^5 + 5b^2a^4 - 10ab^5 - 10a^2b^4 - 5a^3b = 2b^6 + 2ab^5 + 10a^2b^4 + 15a^3b^3 + 5a^4b^2$

Réduction $3a^6 + 8ba^5 = 2b^6 + 12ab^5 + 25a^2b^4 + 20a^3b^3$

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

155 LEs préfix de l'équation du deuxiême degré, à laquelle l'équation propôſée d'un plus haut degré doit être réduite, peuvent être cachés, ou un ſeul, ou tous deux dans les préfix de la raiſon propôſée, en ce qu'ils en peuvent être aliquote ou aliquotes. C'eſt pourquoi.

Si les préfix de l'équation propôſée ſont des nombres prémiers, ou ils ſont de l'équation du deuxiême degré, qu'on cherche, ou bien ceux de l'équation du deuxiême degré, ſont l'unité, qui dans la haute équation eſt multipliée par les nombres prémiers, qui en ſont les préfix.

Il eſt donc bon avant que d'opérer, de chèrcher toutes les aliquotes des préfix de l'équation à réduire. Et ſi dans le détail de cette équation il paroît dans les ſituations requiſes, ou deux de ces aliquotes, ou une aliquote de l'un de ces préfix, & en même temps l'autre préfix, alors on pourra opérer.

COROLLAIRE.

DE la vérité de ce Théorême il ſuit que toute équation, de quelque degré que ce ſoit, dont le problême ſera plan, pourra être baiſſée par cette méthode à une équation du deuxiême degré; parce que toute équation d'un problême plan eſt périodique, & que dans le détail de toute raiſon périodique, les reſtes générants de l'équation du deuxiême degré ſe montrent.

Etant cèrtain qu'une équation haute, ou d'un haut degré, ne peut être baiſſée à une équation baſſe, que la baſſe étant aſſez élevée ne forme la haute.

Je m'étois flatté de porter plus loin cette tentative; mais il faut obéir à mon grand âge, & peut-être n'étois-je pas capable dans ma jeuneſſe d'aller plus loin.

EXTRAITS

Digitized by Google

EXTRAITS DE QUELQUES LETTRES de feu Monſieur de Leibnits.

JE crois devoir ajoûter ici des Extraits de quelques Lettres que feu M. de Leibnits m'écrivit il y a pluſieurs années. Je liai amitié avec lui à Hannovre, où j'eus l'honneur de porter les compliments de S. A. S. feu Monſeigneur l'Evêque d'Oſnabruk ſur ſon avenement à la ſucceſſion du Duché de Hannovre. Je lui communiquai ma définition de la raiſon Géométrique, & mon Probleme, * *dans lequel je donne la méthode de donner par nombres & par lettres, autant de ſouſtractions qu'on veut du détail de la raiſon des racines des deux hautes puiſſances de toute équation donnée, & je lui fis voir qu'il n'eſt pas même néceſſaire que l'équation ſoit parfaite, pourvû qu'on en connoiſſe les approximations, comme on connoit celles de la raiſon, qui eſt entre la circonférence d'un cercle, & ſon diamétre. Je lui démontrai par lettres le théorème ſuivant, qui eſt* * *la prémiére formule que j'ai donnée des équations du deuxiéme dezré. Ce probleme eſt tel. De toute équation* $a^2 = b^2 + pab$, *la raiſon* a:b *eſt ſourde, & dans chaque grade elle a autant de ſouſtractions que* p *préfix du plan* ab *a d'unités. L'exemple que je lui en donnai fut l'équation* $a^2 = b^2 + ab$, *qui en eſt le premier cas, & je ne lui en dis pas davantage.*

* 61

* 128

J'avouë que j'étois entété de ma définition de la raiſon Géométrique, que je pourrois prouver avoir inventée étant à Paris ſur la fin de 1666, *par laquelle je démontrai aiſément toute la doctrine des proportions qui eſt dans Euclide, hormis la proportion perturbée que j'ai démontrée depuis. Comme je m'étois appliqué à autre choſe qu'à la Géometrie, j'euſſe voulu que quelque bon eſprit eût fait uſage de ma définition. Je la communiquai d'abord au Révérend Pere Nicolas Jeſuite, dont on va donner les Elemens de Géometrie, ouvrage poſthume; & il m'a dit ſouvent que s'il avoit ſçû ſe ſervir de ma définition, il l'eût fait, & m'en eût, ajoûtoit-il, donné tout l'honneur. Dans la même intention je la communiquai par une de mes lettres au*

Digitized by Google

Révérend Pere Malebranche, à qui feu Monſieur l'Abbé de la Brouë, qui eſt mort Evêque de Mirepoix, m'avoit fait rendre une viſite, qui eſt la ſeule que je lui aye renduë. Il me fit réponſe qu'il ne s'attachoit pas aux Mathématiques, mais qu'il avoit un jeune homme auprès de lui, à qui il la donneroit. C'étoit Preſtet, qui dans la deuxième édition de ſes Elemens en tira la prémière conſéquence qu'on en peut tirer; & après m'avoir démontré cette conſéquence par ſa définition de la raiſon Géométrique, il s'en eſt ſervi dans deux ou trois démonſtrations des proportions entre grandeurs de même eſpéce. Monſieur Leibnits la regarda ſi ſçavamment, que je n'entendis pas ce qu'il vouloit dire. Je vois bien maintenant qu'il y chèrchoit une ſérie, mais je ne ſçai ſi c'étoit pour parvenir à une réſolution générale des équations, ou s'il avoit quelque vûë plus ſublime. J'eſperois l'entendre un jour auſſi-bien que ſes plus belles découvèrtes, dont il me rendoit compte: mais ce jour n'eſt pas venu. Voici donc ces Extraits, dont peut-être les Sçavants feront quelque uſage.

MONSIEUR, j'ai reçû votre obligeante Lettre, dont je vous ſuis infiniment obligé. Je vous aurois répondu il y a long temps, mais elle m'a été renduë aſſez tard, & lorſque j'étois embarraſſé avec mon entrepriſe aux mines, d'où je prétends de tirer l'eau..... Je voudrois ſçavoir la progreſſion des quotients redoublés exprimant la grandeur du cèrcle, comme vous exprimez les tèrmes de la moyenne & extrême raiſon; mais ce ſera un peu pénible, à moins qu'on ne trouve quelque abrégé pour cela. Je n'ai pas encore avancé à mon gré dans cette méthode. Pour la pèrfectionner il faudroit pouvoir réſoudre ces problêmes généraux, qui ſeroient comme de l'algorithme de cette méthode, *nimirum addere & ſubtrahere, item multiplicare & dividere quotientes replicatos, exempli gratiâ:*

Sit $\frac{a}{b}$ *æqual* $1+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ &c. *Et* $\frac{c}{d}$ *æqual* $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ &c.

Invenire $\frac{ac}{bd}$ *æqual*, &c. *Item* $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ *æqual*, &c. *poſito*

Digitized by Google

esse l, m, n, &c. Item p, q, r, &c. esse numeros integros datos, id est saltem datas esse ipsarum rationes inter se invicem, sive datos esse valores ipsarum $\frac{1}{m}$ *&* $\frac{1}{n}$, *&* $\frac{m}{n}$ *&* $\frac{1}{p}$, *&* $\frac{m}{q}$ *&* $\frac{1}{r}$ *aliarum ejusmodi rationum expressos per quotientes replicatos numero finitos, quia sunt commensurabiles & dati. Puto hoc possibile esse, & ex attenta consideratione rationum commensurabilium talem methodum generalem eligi posse. Ea autem habita haberetur, ut dixi, algorithmus talis calculi, & perinde calculare possemus adhibitis æquationibus aliis quibuslibet finitis ordinariis. Antequam autem alius hujusmodi calculi algorithmus inveniatur, id est rationum additio & compositio, sive multiplicatio, semper hærebimus, nec nisi pauca & faciliora dabimus.*

A Hannovre $\frac{11}{21}$ *de Novembre* 1680.

Autre Extrait du $\frac{15}{25}$ *Août* 1681.

MONSIEUR, je vous dois encore réponse à une Lettre très-obligeante que vous avez eu la bonté de m'écrire de Toulouse. Mais j'esperois de pouvoir pousser plus avant la rechèrche, *De quotientibus replicatis*, dont la suite exprime l'espéce de la raison, ce qui est conforme à vos pensées ; cependant on m'a taillé tant d'autres besognes..... Je souhaite fort, Monsieur, que vous poursuiviez vos pensées de Géométrie, qui sont très considérables, & très-solides. J'espère que vous aurez mis vos projêts en état de ne pas en être empêché. Il est vrai que la Cour peut être.....

Autre Extrait du $\frac{1}{15}$ *Octobre* 1691.

POUR moi en particulier j'aurois souhaité de voir votre méthode d'estimer les grandeurs par la rechèrche de la commune mesure (ou d'une série de quotients, lorsque cette mesure ne se sçauroit trouver) poussée plus avant. Vous vous souviendrez peut être que j'avois coûtume d'exprimer votre série des quotients par une telle équation

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \&c.$$

où l, m, n, p, &c. sont des quotients lesquels sont égaux, lorsque la ligne est coupée en moyenne & extrême raison. Mais ce qui me fait répéter cela ici est que

j'ai remarqué depuis dans l'Arithmétique des Infinis de M. Wallis, que Milord Brounker, (qui a été Président de la Société Royale) avoit exprimé la grandeur du cèrcle par une formule approchante, mais qui ne donne pas cette série des quotients, comme je l'aurois souhaité. Voici cette expression.

Le quârré du diamétre est au cèrcle
Comme $1+\frac{1}{2}$ est à l'unité
$+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}+\frac{16}{2}+\frac{25}{2}+\frac{36}{2}+$&c.

Cette expression est en quelque façon un renvèrsement de la vôtre énoncée à ma manière ; car au lieu que dans votre expression il y a toûjours l'unité, il y a dans celle-ci 1, 4, 9, 16, &c. qui sont les quârrés tous de suite ; & au lieu de vos quotients variables, il y a ici 2, 2, 2, &c. Je ne sçai si cela vous pourroit peut-être sèrvir pour exprimer la grandeur du cèrcle par une série de vos quotients, ce qui seroit fort considérable.

Autre Extrait du 6 Novembre 1705.

JE souhaiterois, Monsieur, que vous fussiez de loisir & d'humeur de poursuivre vos belles pensées sur les proportions, en les chèrchant par la voye de l'inquisition, *maximæ communis mensuræ*, ou par une subsstraction répétée du résidu. Il est remarquable que par cette voye, non seulement la rechèrche se tèrmine, quand les grandeurs sont commensurables, mais aussi quand l'incommensurabilité est du prémier degré ; c'est-à-dire, quand l'équation est du second, la proportion infinie des quotients est périodique.

C'est là ce que contiennent mes Lettres de M. Leibnits touchant la matière de cet Ouvrage.

FIN.

608954
Biblioteca Nazionale NAPOLI
Digitized by Google

APPROBATION.

J'Ay lû par l'ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux, un Manuſcrit intitulé, *De la Réſolution des Equations, ou de l'Extraction de leurs Racines* ; & j'ai crû que les nouvelles vûës de l'Auteur ſur la matiere qu'il traite dans cet Ouvrage, pouvoient être pouſſées plus loin, & méritoient d'être communiquées au Public par l'impreſſion. Fait à Paris le deuxiême de Juin mil ſept cens vingt-huit.

SAURIN.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE: A nos amés & féaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra; SALUT. Notre bien amé le Sieur *** Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage de ſa compoſition, qui a pour titre, *De la Réſolution des Equations*, ou *De l'Extraction de leurs Racines*, s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce néceſſaires; offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & en beaux caracteres, ſuivant la feüille imprimée & attachée pour modéle ſous le contre-ſcel des Preſentes. A ces cauſes, voulant traiter favorablement ledit Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Preſentes de faire imprimer ledit Livre ci-deſſus ſpecifié, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon lui ſemblera, ſur papier & caracteres conformes à ladite feüille imprimée & attachée ſous notredit contre-ſcel;

& de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de dix années consécutives, à compter du jour de la date desdites Presentes. Faisons defenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression etrangere dans aucun lieu de notre Obéissance; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs, & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, debiter, ni contrefaire ledit Livre ci-dessus exposé, en tout, ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changement de titre, ou autrement, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel Dieu de Paris, l'autre tiers audit Exposant, & de tous dépens, dommages & interêts; à la charge que ces Presentes seront enregistrées tout au long sur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression de ce Livre sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, & que l'Impetrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du dixiéme Avril mil sept cens vingt cinq; & qu'avant que de l'exposer en vente, le Manuscrit ou Imprimé, qui aura servi de copie à l'impression dudit Livre, sera remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Chauvelin; & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliotheque Publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur Chauvelin; le tout à peine de nullité des Presentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Exposant, ou ses ayans-cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Pre-

Digitized by Google

ſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenuë pour dûëment ſignifiée ; & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'original. Commandons au prémier notre Huiſſier ou Sergent, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires. Car tel eſt notre plaiſir. Donné à Paris le trentiême jour du mois de Juin, l'an de Grace mil ſept cens vingt-huit, & de notre Regne le treiziême, par le Roy en ſon Conſeil.

SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre VII. de la Chambre Royale & Syndicale de la Librairie & Imprimerie de Paris, numero 163. folio 140. *conformément au Réglement de* 1723. *qui fait défenſes*, art. IV. *à toutes perſonnes de quelque qualité qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter, & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs, ou autrement, & à la charge de fournir les Exemplaires preſcrits par l'article* CVIII. *du même Réglement. A Paris ce ſixiéme Juillet mil ſept cens vingt-huit.*

J. B. COIGNARD, *Syndic*.

Je ſouſſigné faiſant pour le Sieur *** ai cedé & tranſporté la moitié du Privilege de l'autre part à Monſieur Quillau, pour en joüir par lui ſuivant & conformément au traité que nous avons fait ce jourd'hui enſemble. Fait à Paris le ſeptiême Juillet mil ſept cens vingt-huit.

BEGAUD.

Il eſt bon d'avertir ici le Lecteur que les nombres qui ſont aux marges avoient été marqués aſſez peu éxactement dans la copie, le même étant quelquefois répété deux fois, & quelques-uns étant omis. Cela n'eſt d'aucune conſequence pour l'Ouvrage. En voici quelques-uns qu'il faut ajouter.

PAge 82, ligne 2, Section II. *mettez* Section III.
Page 120, ligne 11, *à la marge* 90.
Page 122, ligne 1, *à la marge* 91.
Page 123, ligne 9, *à la marge* 92.
Page 124, ligne 7, *à la marge* 93.
ligne 13, *à la marge* 94.
Page 126, ligne 6, *à la marge* 95.
Page 129, ligne 18, *à la marge* 96.
Page 130, ligne 15, *à la marge* 97.
Page 131, ligne 1, *à la marge* 98.
Page 134, ligne 1, *à la marge* 99.
Page 140, ligne 16, Section I. *liſez* Section IX. *Et mettez à la marge* 100.
Page 144, ligne 7, *à la marge* 101.
Page 147, ligne 1, *à la marge* 102.

601254

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

c gtt az

c - 30

Digitized by Google

Digitized by Google